RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 3 gennaio 1904.

P. Blaserna, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sopra la funzione* $E_\alpha(x)$. Nota del Socio straniero G. Mittag Leffler.

Ho enunciato recentemente (1) alcune proprietà della mia nuova funzione

$$E_\alpha(x) = 1 + \frac{x}{\Gamma(\alpha . 1 + 1)} + \frac{x^2}{\Gamma(\alpha . 2 + 1)} + \cdots + \frac{x^\nu}{\Gamma(\alpha . \nu + 1)} + \cdots$$

nel caso in cui la costante α è positiva.

Il metodo impiegato per ottenere questi resultati mi permette pure di studiare la funzione $E_\alpha(x)$ nel caso in cui α sia complesso.

Pongasi

$$\alpha = \beta + i\gamma$$

e supponiamo

$$\beta > 0$$

il che è necessario affinchè $E_\alpha(x)$ sia una funzione intera.

Poniamo inoltre, per semplificare,

$$\beta(2 - \beta) > \gamma^2.$$

Gli altri casi si possono trattare collo stesso metodo.

(1) Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences (Séance du 12 octobre 1903)

Consideriamo la spirale logaritmica

$$R = e^{-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}\psi} e^{\frac{\beta}{\gamma}\theta}$$

in cui R e θ designano le coordinate polari dei punti della spirale e ψ è una quantità reale. Se si fa variare ψ da $-\infty$ a $+\infty$, il piano complesso x sarà coperto interamente dall'insieme delle varie spirali che si ottengono. Si vede d'altra parte che due spirali diverse non hanno nessun punto comune.

Il modulo

$$\left| E_\alpha(x) - \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} \right|$$

si avvicina indefinitamente a zero quando x va verso l'infinito lungo una spirale

$$R = e^{-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}\psi} e^{\frac{\beta}{\gamma}\theta}$$

se ad essa corrisponde un valore di ψ tale che

$$-\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2},$$

mentre il modulo $|E_\alpha(x)|$ si avvicina indefinitamente a zero allorchè x va verso l'infinito lungo una spirale corrispondente ad un valore diverso di ψ.

Si vede immediatamente che nel primo caso

$$\left| \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} \right| = \frac{1}{|\alpha|} e^{e^{-\frac{\beta}{\gamma}\psi+\frac{1}{\gamma}\theta} \cdot \cos\psi} = \frac{1}{|\alpha|} e^{e^{\frac{\gamma}{\beta}\psi} \cdot R^{\frac{1}{\beta}} \cdot \cos\psi}, \text{ per } -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$$

$$\left| \frac{1}{\alpha} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} \right| = \frac{1}{|\alpha|}, \qquad \text{per } \psi = \pm\frac{\pi}{2}$$

e per conseguenza il modulo $|E_\alpha(x)|$ aumenta indefinitamente quando x va verso l'infinito lungo una spirale $-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}$, mentre si approssima indefinitamente verso $\frac{1}{|\alpha|}$ allorchè x va verso l'infinito lungo una delle due spirali $\psi = \pm\frac{\pi}{2}$.

Il resultato più interessante che si ottiene collo studio di questa funzione $E_\alpha(x)$ è il seguente.

Poniamo

$$F(x) = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots\dots ,$$

in cui la serie $k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots$ sia convergente in un certo campo.

Denotiamo con A la stella curvilinea che si ottiene muovendosi verso l'infinito sopra ciascuna delle spirali

$$R = e^{-\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}\psi} e^{\frac{\beta}{\gamma}\theta} \quad ; \quad -\infty < \psi < +\infty$$

ed escludendo dal piano la parte di ogni spirale che si trova fra il primo punto singolare di $F(x)$ e l'infinito.

Introduciamo la funzione

$$F_\alpha(x) = k_0 + \frac{k_1}{\Gamma(\alpha.1+1)} x + \frac{k_2}{\Gamma(\alpha.2+1)} x^2 + \dots + \frac{k_\nu}{\Gamma(\alpha.\nu+1)} x^\nu + \dots$$

e studiamo l'integrale

$$\int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega .$$

Ad ogni valore di α corrisponde una stella curvilinea $B^{(\alpha)}$ formata dalle stesse spirali di A, la quale è inscritta in A e nel tempo stesso è una stella di convergenza dell'integrale.

Si hanno le due eguaglianze

$$FB^{(\alpha)}(x) = \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega$$

$$FA(x) = \lim_{\frac{\beta^2+\gamma^2}{\gamma}=0} \int_0^\infty e^{-\omega} F_\alpha(\omega^\alpha x)\, d\omega .$$

La stella A dell'ultima formula è al pari della stella $B^{(\alpha)}$ della prima, una stella di convergenza del secondo membro.

Il resultato è interessante poichè è la prima volta che una stella curvilinea si presenta spontaneamente in un problema generale d'analisi.

Debbo peraltro osservare che il sig. E Lindelöf ha, d'altra parte, trattato recentemente un'altra questione nella quale la spirale comparisce in modo analogo (1).

(1) *Sur l'application de la théorie des résidus au prolongement analytique des séries de Taylor.* Journal de math. pures et appl., série V, t. 9, pages 220, 221.

Matematica. — *Sopra le rappresentazioni equivalenti della sfera e le coppie di superficie applicabili.* Nota del Socio LUIGI BIANCHI.

1. Alle ricerche seguenti sulla deformazione delle superficie sono stato condotto dall'esame di due passi delle opere postume di Gauss, che si collegano evidentemente alla scoperta dell'invariabilità della curvatura per flessione [1]) Gauss osserva ivi che le immagini sferiche di superficie applicabili danno figure equivalenti (d'eguale area), e su questa proprietà sembra che egli intendesse fondare la risoluzione del problema generale della deformazione. Ma, come bene osserva il Weingarten nelle note esplicative (Gauss-Werke, Bd. VIII, pag. 448), le indicazioni incomplete lasciate da Gauss non permettono di riconoscere senz'altro in qual modo avrebbe dovuto procedere la ricerca ulteriore.

Mi è parso opportuno riprendere le considerazioni stesse di Gauss ed esaminare a quali risultati poteva condurre il metodo da lui indicato. Essi mi sembrano contenuti nella proposizione generale seguente, di cui darò la dimostrazione:

A) *Fissata una qualunque rappresentazione equivalente della sfera sopra sè stessa, esistono infinite coppie di superficie applicabili (dipendenti da due funzioni arbitrarie) che hanno per immagini sferiche quelle due date figure sferiche equivalenti. La ricerca di queste coppie dipende dall'integrazione di un'equazione lineare alle derivate parziali del second'ordine.*

Riserbandomi di dare in una prossima Nota la dimostrazione diretta di questo teorema, mi servirò nella presente delle considerazioni di geometria ellittica che mi hanno condotto a stabilirlo. Nel modo più naturale si collegano infatti queste ricerche alla doppia rappresentazione di Clifford delle superficie nello spazio ellittico, come già ne ho fatto cenno nella mia Nota precedente sulle superficie isoterme [2]). Le proprietà fondamentali che verrò esponendo dimostrano invero che la rappresentazione di Clifford ha nella teoria delle deformazioni *finite* delle superficie un ufficio analogo a quello della rappresentazione sferica di Gauss per le deformazioni infinitesime.

A base della teoria sta la proposizione seguente:

B) *Affinchè un sistema coniugato sopra una superficie* S *si conservi coniugato in una deformazione* FINITA *di questa, è necessario e suffi-*

(1) Gauss-Werke, Bd. VIII, pag. 372 e 447.

(2) Questi Rendiconti (2° sem. vol. XII), seduta del 6 dicembre 1903.

ciente che la sua immagine sferica coincida con una delle immagini di Clifford delle assintotiche di una superficie Σ dello spazio ellittico.

È ben nota la proposizione analoga che collega la teoria delle deformazioni infinitesime colla ordinaria rappresentazione sferica (1).

Di questi risultati generali mi limito, nella presente Nota, ad indicare due applicazioni a speciali problemi di deformazione. Il primo problema riguarda la costruzione delle coppie di superficie applicabili, nelle quali le assintotiche dell'una si distendono sull'altra in un sistema coniugato. Si vedrà che le superficie suscettibili di tali deformazioni sono tutte e sole le superficie *associate* (2) a quelle di curvatura costante positiva nelle deformazioni infinitesime di queste.

Il secondo problema tratta delle coppie di superficie applicabili in guisa che le normali in due punti corrispondenti facciano fra loro angolo costante.

2. Consideriamo, come nella Nota precedente, una superficie Σ dello spazio ellittico riferita alle sue linee di curvatura (u, v), per la quale manteniamo le stesse notazioni (3). Essendo (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$ i parametri di scorrimento destrorsi degli spigoli dal triedro principale, e similmente $(\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i)$ quelli sinistrorsi, sussistono le formole del Fubini:

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{\varrho_2}X_3\,, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1 + \sqrt{E}\,X_3\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{\varrho_2}X_1 - \sqrt{E}\,X_2 \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2 - \sqrt{G}\,X_3\,, \quad \dfrac{\partial X_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_1}X_3\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial X_3}{\partial v} = \sqrt{G}\,X_1 + \dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_1}X_2 \end{cases}$$

$$(1^*)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial u} = -\dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\overline{X}_2 - \dfrac{\sqrt{E}}{\varrho_2}\overline{X}_3\,, \quad \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial u} = \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\overline{X}_1 - \sqrt{E}\,\overline{X}_3\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{E}}{\varrho_2}\overline{X}_1 + \sqrt{E}\,\overline{X}_2 \\ \dfrac{\partial \overline{X}_1}{\partial v} = \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\overline{X}_2 + \sqrt{G}\,\overline{X}_3\,, \quad \dfrac{\partial \overline{X}_2}{\partial v} = -\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\overline{X}_1 - \dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_1}\overline{X}_3\,, \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial \overline{X}_3}{\partial v} = -\sqrt{G}\,\overline{X}_1 + \dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_1}\overline{X}_2\,, \end{cases}$$

colle analoghe per Y_i, Z_i; $\overline{Y}_i, \overline{Z}_i$.

(1) V. le mie *Lezioni di geometria differenziale*, vol. II, pag. 15 (Pisa., Spörri, 1902-1903).

(2) Per la definizione e le proprietà delle superficie associate v. il § 225 delle mie *Lezioni* (vol. II, pag. 8).

(3) Soltanto i raggi principali di curvatura si indicano qui con ϱ_1, ϱ_2 per evitare confusione coi simboli r, r_1 delle rotazioni al seguente n. 3.

Cerchiamo ora di determinare quattro tali funzioni $\xi, \eta; \xi_1, \eta_1$ di u, v che risultino differenziali esatti tanto le espressioni

$$(2) \qquad (\xi X_1 + \eta X_2)\, du + (\xi_1 X_1 + \eta_1 X_2)\, dv$$

colle altre due analoghe per Y, Z, come le altre

$$(2^*) \qquad (\xi \overline{X}_1 + \eta \overline{X}_2)\, du + (\xi_1 \overline{X}_1 + \eta_1 \overline{X}_2)\, dv, \text{ ecc.}$$

Scrivendo la condizione d'integrabilità per la (2), osservando le (1), otteniamo le tre relazioni

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial v} - \dfrac{\partial \xi_1}{\partial u} - \eta \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \eta_1 \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial v} - \dfrac{\partial \eta_1}{\partial u} + \xi \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \xi_1 \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \\ \xi \sqrt{G} + \eta_1 \sqrt{E} + \eta \dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_1} - \xi_1 \dfrac{\sqrt{E}}{\varrho_2} = 0. \end{cases}$$

Analogamente procedendo per la (2*), otteniamo le stesse prime due equazioni (3) e invece della terza, l'altra

$$\xi \sqrt{G} + \eta_1 \sqrt{E} - \eta \frac{\sqrt{G}}{\varrho_1} + \xi_1 \frac{\sqrt{E}}{\varrho_2} = 0.$$

Ne segue che ξ, η ; ξ_1, η_1 si esprimono per due sole ausiliarie λ, μ colle formole

$$\xi = \lambda \sqrt{E}, \eta = \mu \frac{\sqrt{E}}{\varrho_2}, \xi_1 = \mu \frac{\sqrt{G}}{\varrho_1}, \eta_1 = -\lambda \sqrt{G},$$

e sostituendo nelle due prime (3), coll'aver riguardo alle formole di Codazzi,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\varrho_1}\right) = \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\varrho_2}\right) = \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

vediamo che le funzioni incognite λ, μ debbono unicamente soddisfare le due equazioni simultanee del 1° ordine

$$(4) \qquad \begin{cases} \sqrt{E} \dfrac{\partial \lambda}{\partial v} - \dfrac{\sqrt{G}}{\varrho_1} \dfrac{\partial \mu}{\partial u} + 2\lambda \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \dfrac{2\mu}{\varrho_2} \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \\ \sqrt{G} \dfrac{\partial \lambda}{\partial u} + \dfrac{\sqrt{E}}{\varrho_2} \dfrac{\partial \mu}{\partial v} + 2\lambda \dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \dfrac{2\mu}{\varrho_1} \dfrac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

alle quali si può sostituire un' unica equazione (lineare) del 2° ordine, l'equazione (a) che troviamo più avanti.

Supposta scelta una coppia (λ, μ) che soddisfaccia le (4), indichiamo con x, y, z le funzioni di cui le (2) colle analoghe, sono differenziali esatti e similmente con $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ gli integrali della (2*) e delle analoghe, poniamo cioè

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \int \left\{ \sqrt{E}\left(\lambda X_1 + \frac{\mu}{\varrho_2} X_2\right) du + \sqrt{G}\left(\frac{\mu}{\varrho_1} X_1 - \lambda X_2\right) dv \right\} \\ \bar{x} = \int \left\{ \sqrt{E}\left(\lambda \bar{X}_1 + \frac{\mu}{\varrho_2} \bar{X}_2\right) du + \sqrt{G}\left(\frac{\mu}{\varrho_1} \bar{X}_1 - \lambda \bar{X}_2\right) dv \right\} \end{cases}$$

e analogamente per y, z ; $\bar{y}, \bar{z}$.

Riguardando x, y, z ; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ come rispettive coordinate di due punti P, $\bar{P}$ mobili nello spazio euclideo, questi descriveranno due superficie S, $\bar{S}$ collo stesso elemento lineare

$$(6)\qquad ds^2 = E\left(\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\varrho_2^2}\right) du^2 + 2\sqrt{EG}\,\lambda\mu\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}\right) du\,dv + G\left(\lambda^2 + \frac{\mu^2}{\varrho_1^2}\right) dv^2 .$$

Indicando poi con D, D′, D″, $\bar{D}$, $\bar{D}'$, $\bar{D}''$ i rispettivi coefficienti delle seconde forme fondamentali per S, $\bar{S}$, troviamo

$$(6^*)\qquad \begin{cases} D = \frac{E}{\varrho_2}(\mu - \lambda), D' = -\sqrt{EG}\left(\lambda + \frac{\mu}{\varrho_1 \varrho_2}\right), D'' = -\frac{G}{\varrho_1}(\mu - \lambda) \\ \bar{D} = -\frac{E}{\varrho_2}(\mu + \lambda), \bar{D}' = \sqrt{EG}\left(\lambda - \frac{\mu}{\varrho_1 \varrho_2}\right), \bar{D}'' = \frac{G}{\varrho_1}(\mu + \lambda). \end{cases}$$

Ora le due identità

$$\frac{E}{\varrho_2} D'' + \frac{G}{\varrho_1} D = 0 \ , \ \frac{E}{\varrho_2} \bar{D}'' + \frac{G}{\varrho_1} \bar{D} = 0$$

dimostrano che alle assintotiche di Σ corrisponde un sistema coniugato tanto sopra S, quanto sopra $\bar{S}$. Abbiamo dunque il teorema:

Le due immagini di Clifford delle assintotiche di una qualunque superficie Σ dello spazio ellittico danno le immagini sferiche del sistema coniugato comune di infinite coppie di superficie applicabili dello spazio euclideo.

La determinazione effettiva di queste coppie abbiamo fatto dipendere dall' integrazione del sistema (4). Ma se riferiamo ad esempio la superficie

S a coordinate tangenziali (1) $(X_3, Y_3, Z_3; W)$ possiamo sostituirvi l'integrazione dell'unica equazione lineare del 2° ordine in W:

$$(a) \qquad \frac{G}{\varrho_1} W_{11} + \frac{E}{\varrho_2} W_{22} + EG\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\left(1 + \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}\right) \cdot W = 0 \ (2),$$

le derivate seconde covarianti W_{11}, W_{22} essendo calcolate rispetto all'elemento lineare sferico

$$(b) \qquad ds_1^2 = E\left(1 + \frac{1}{\varrho_2^2}\right) du^2 + 2\sqrt{EG}\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) du\, dv + G\left(1 + \frac{1}{\varrho_1^2}\right) dv^2.$$

3. Vogliamo ora invertire i risultati precedenti e dimostrare che una coppia qualunque $(S, \bar{S})$ di superficie applicabili dello spazio euclideo individua una superficie Σ dello spazio ellittico, che ha per immagini di Clifford delle linee assintotiche, le immagini sferiche del sistema coniugato comune di $S, \bar{S}$. Per questo mi servirò delle formole relative al *triedro mobile*, sviluppate nella Leçons di Darboux (T. I e II) e riportate ai §§ 284-286 del mio libro (Vol. II).

Siano (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$ i coseni di direzione del triedro mobile (comunque orientato) per la superficie S, e similmente $(\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i)$ quelli del triedro corrispondente per S. Indichino poi

$$p, q, r \ ; \ p_1, q_1, r_1$$

le rotazioni del primo triedro e

$$\bar{p}, \bar{q}, \bar{r} \ ; \ \bar{p}_1, \bar{q}_1, \bar{r}_1$$

quelle del secondo. Si osservi che tutta la dimostrazione seguente è fondata sulle note eguaglianze

$$(c) \qquad \bar{r} = r \ , \ \bar{r}_1 = r_1,$$

dipendendo le rotazioni r, r_1 solo dall'elemento lineare.

Riguardiamo ora X_i, Y_i, Z_i ; $\bar{X}_i, \bar{Y}_i, \bar{Z}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ come parametri di scorrimento rispettivamente destrorsi e sinistrorsi, di una retta t_i (3) nello spazio ellittico (e della sua polare). Avremo così tre rette t_1, t_2, t_3, le

(1) *Lezioni*, vol. I, § 81.

(2) Questa non è altro che la traduzione analitica del fatto geometrico che alle assintotiche di Σ corrisponde un sistema coniugato sopra S.

(3) Questa avrà dunque le sei coordinate

$$X_i \pm \bar{X}_i, Y_i \pm \bar{Y}_i, Z_i \pm \bar{Z}_i.$$

quali, a causa delle relazioni

$$\left.\begin{aligned} X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k &= 0 \\ \overline{X}_i \overline{X}_k + \overline{Y}_i \overline{Y}_k + \overline{Z}_i \overline{Z}_k &= 0 \end{aligned}\right\} i \neq k,$$

a due a due si incontrano, e quindi o passano per un punto, o giacciono in un piano. Ma il secondo caso riduciamo al primo sostituendo alle tre rette le tre loro polari; possiamo dunque ritenere che t_1, t_2, t_3 escano da un punto. Esse saranno i tre spigoli di un triedro trirettangolo.

Le coordinate di Weierstrass [1]

$$x_0\ x_1\ x_2\ x_3$$

del vertice di questo triedro si calcoleranno subito con note formole elementari, e così pure calcoleremo elementarmente i coseni di direzione, nello spazio ellittico, delle rette t_1, t_2, t_3, i quali indicheremo rispettivamente con

$$(\eta_0, \eta_1, \eta_2, \eta_3)\ ,\ (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3)\ ,\ (\xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Ora nel determinante quaternario ortogonale

$$\nabla = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \xi_0 & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_0 & \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_0 & \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix}$$

le derivate, rispetto ad u e v di ciascun elemento si esprimono linearmente ed omogeneamente per gli altri tre elementi con coefficienti identici per le quattro colonne. Possiamo subito esprimere questi coefficienti per le rotazioni, ricordando le formole

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial X_1}{\partial u} = r X_2 - q X_3\ ,\ \frac{\partial X_2}{\partial u} = p X_3 - r X_1\ ,\ \frac{\partial X_3}{\partial u} = q X_1 - p X_2 \\ &\frac{\partial X_1}{\partial v} = r_1 X_2 - q_1 X_3\ ,\ \frac{\partial X_2}{\partial v} = p_1 X_3 - r_1 X_1\ ,\ \frac{\partial X_3}{\partial v} = q_1 X_1 - p_1 X_2\ , \end{aligned}\right.$$

e le analoghe per $\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3$, *ove si abbia riguardo alle eguaglianze* (*c*). Basta allora ricorrere alle note espressioni di X_i, $\overline{X}_i$ per i minori di 2° ordine di ∇ per trovare le formole effettive:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{p-\bar{p}}{2}\eta + \frac{q-\bar{q}}{2}\zeta\ ,\ \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{p_1-\bar{p}_1}{2}\eta + \frac{q_1-\bar{q}_1}{2}\zeta \\ &\frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{q+\bar{q}}{2}\eta - \frac{p+\bar{p}}{2}\zeta\ ,\ \frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{q_1+\bar{q}_1}{2}\eta - \frac{p_1+\bar{p}_1}{2}\zeta \\ &\frac{\partial \eta}{\partial u} = -\frac{p-\bar{p}}{2}x - \frac{q+\bar{q}}{2}\xi + r\zeta\ ,\ \frac{\partial \eta}{\partial v} = -\frac{p_1-\bar{p}_1}{2}x - \frac{q_1+\bar{q}_1}{2}\xi + r_1\zeta \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial u} = -\frac{q-\bar{q}}{2}x + \frac{p+\bar{p}}{2}\xi - r\eta\ ,\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} = -\frac{q_1-\bar{q}_1}{2}x + \frac{p_1+\bar{p}_1}{2}\xi - r_1\eta. \end{aligned}\right.$$

[1] *Lezioni*, vol. I, § 193.

Ora il punto (x_0, x_1, x_2, x_3) descrive nello spazio ellittico una superficie Σ, la cui normale, a causa delle identità

$$\sum_i^{0=3} \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial u} = 0 \ , \ \sum_i^{0=3} \xi_i \frac{\partial x_i}{\partial v} = 0,$$

è precisamente la retta t_3. Dunque le due immagini di Clifford per Σ coincidono colle due immagini sferiche di $S, \bar{S}$.

Dimostriamo ora di più che il sistema coniugato comune di $S, \bar{S}$ corrisponde alle assintotiche di Σ. Nel modo più semplice verifichiamo questo fatto, osservando che dalle (8) seguono le formole

$$\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = \frac{p\bar{q} - \bar{p}q}{2} \ , \ \Sigma \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = \frac{p_1 \bar{q}_1 - \bar{p}_1 q_1}{2} .$$

Ora se pel sistema (u, v) prendiamo il sistema coniugato comune di $S, \bar{S}$, dalle formole (9) a pag. 183 del Vol. II delle mie *Lezioni*, si vede che sussistono le proporzioni

$$p : q = \bar{p} : \bar{q} \ , \ p_1 : q_1 = \bar{p}_1 : \bar{q}_1$$

e quindi

$$\Sigma \frac{\partial x_i}{\partial u} \frac{\partial \xi_i}{\partial u} = 0 \ , \ \Sigma \frac{\partial x_i}{\partial v} \frac{\partial \xi_i}{\partial v} = 0 .$$

Queste formole esprimono appunto che sopra Σ le linee (u, v) sono le assintotiche.

4. Il processo di dimostrazione ora tenuto può anche applicarsi a stabilire, per altra via, il teorema del Fubini: *una qualunque rappresentazione equivalente della sfera sopra sè stessa individua nello spazio ellittico una serie di superficie parallele, le cui due immagini di Clifford sono date da quelle due figure sferiche equivalenti.*

Siano infatti

$$(g) \qquad \begin{cases} ds_1^2 = e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 \\ \bar{ds}_1^2 = \bar{e}\,du^2 + 2\bar{f}\,du\,dv + \bar{g}\,dv^2 \end{cases}$$

gli elementi lineari delle due figure sferiche equivalenti; avremo

$$e\,g - f^2 = \bar{e}\,\bar{g} - \bar{f}^2,$$

ovvero colle consuete notazioni

$$\Delta = \bar{\Delta}.$$

Fissiamo ora un triedro mobile (X_i, Y_i, Z_i) $i = 1, 2, 3$, associato alla prima figura, il cui terzo spigolo (X_3, Y_3, Z_3) sia la normale alla sfera, e alla seconda figura associamo un analogo triedro $(\overline{X}_i, \overline{Y}_i, \overline{Z}_i)$. Se potremo situare i due triedri, per ora arbitrarii, in tali posizioni relative che ne risultino le eguaglianze (c), sarà applicabile il procedimento del numero precedente e sarà provato il teorema. Ora se $\varphi, \bar{\varphi}$ sono le rispettive inclinazioni degli spigoli (X_1, Y_1, Z_1), $(\overline{X}_1, \overline{Y}_1, \overline{Z}_1)$ dei due triedri sulle tangenti alle linee v, abbiamo [1]

$$\begin{cases} r = \dfrac{\sqrt{A}}{e}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\ ,\quad r_1 = \dfrac{\sqrt{A}}{e}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \bar{r} = \dfrac{\sqrt{A}}{\bar{e}}\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial u}\ ,\quad \bar{r}_1 = \dfrac{\sqrt{A}}{\bar{e}}\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\partial\bar{\varphi}}{\partial v}\ , \end{cases}$$

i simboli di Christoffel $\left\{\begin{matrix}ri\\k\end{matrix}\right\}$, $\left\{\begin{matrix}\overline{ri}\\k\end{matrix}\right\}$ riferendosi alle due rispettive forme (g).

Basterà dunque che le due equazioni

$$(d) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial u} = \dfrac{\sqrt{A}}{e}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\sqrt{A}}{\bar{e}}\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\} \\ \dfrac{\partial(\varphi - \bar{\varphi})}{\partial v} = \dfrac{\sqrt{A}}{e}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\} - \dfrac{\sqrt{A}}{\bar{e}}\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\2\end{matrix}\right\} \end{cases}$$

siano compatibili; ma ciò risulta in effetto dalla circostanza che, essendo le curvature delle forme (9) eguali a $+1$, sussistono le identità:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{A}}{e}\left\{\begin{matrix}11\\2\end{matrix}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{A}}{e}\left\{\begin{matrix}12\\2\end{matrix}\right\}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\sqrt{A}}{\bar{e}}\left\{\begin{matrix}\overline{11}\\2\end{matrix}\right\}\right] - \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\sqrt{A}}{\bar{e}}\left\{\begin{matrix}\overline{12}\\2\end{matrix}\right\}\right] = \sqrt{A}\ .$$

Si può dunque nelle (d) prendere ad arbitrio $\bar{\varphi}$, p. e. $\bar{\varphi} = 0$, e con una quadratura si avrà il valore da assegnarsi a φ. La costante arbitraria introdotta dall'integrazione fisserà, col suo valore, la superficie Σ nella serie parallela.

5. I risultati stabiliti ai numeri precedenti facilmente conducono a dimostrare i teoremi A) B) enunciati nel numero 1. Pel teorema A) la cosa è immediata, applicando successivamente i risultati del numero precedente e

[1] *Lezioni*, vol. II, pag. 181 formole (7).

quelli del numero 2. Per il teorema B) si vede pure immediatamente che la condizione ivi enunciata è necessaria.

Proviamo che è altresì sufficiente come segue. Supposto che la S abbia per immagine di un sistema coniugato l'immagine destrorsa delle assintotiche di Σ, riferendo questa alle sue linee di curvatura, avremo

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \xi X_1 + \eta X_2 \ , \ \frac{\partial x}{\partial v} = \xi_1 X_1 + \eta_1 X_2 ,$$

dove $\xi , \eta \ ; \ \xi_1 , \eta_1$ soddisferanno le (3) n. 2.

La condizione che alle assintotiche di Σ corrisponda un sistema coniugato sopra S, porta l'altra condizione

$$(\xi \sqrt{G} + \eta_1 \sqrt{E}) \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} + \left(\xi_1 \frac{\sqrt{E}}{\varrho_2} - \eta \frac{\sqrt{G}}{\varrho_1} \right) = 0 ;$$

ora questa colla terza delle (3), escludendo il caso $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -1$ [1], porta che si abbia separatamente

$$\xi \sqrt{G} + \eta_1 \sqrt{E} = 0 \ , \ \xi_1 \frac{\sqrt{E}}{\varrho_2} - \eta \frac{\sqrt{G}}{\varrho_1} = 0 .$$

Valgono dunque le formole del n. 2 e la seconda superficie $\bar{S}$ ivi trovata è applicabile sulla S, con conservazione del detto sistema coniugato, *c. d. d.*

Dai teoremi dimostrati si trae ora questa notevole conseguenza:

Una superficie Σ dello spazio ellittico è IN GENERALE *determinata (a meno di uno scorrimento) da una delle immagini di Clifford delle sue linee assintotiche.*

Ma vi ha un caso ben notevole d'eccezione; questo si presenta quando la S ammette più d'una deformazione che conservi coniugato quel sistema. Allora essa ammette una serie continua ad un parametro di tali deformazioni [2], ed abbiamo quindi una serie ∞^1 di superficie Σ dello spazio ellittico, differenti per la forma, e che si corrispondono per parallelismo (destrorso) delle normali e per linee assintotiche, ossia per sistemi coniugati. Il caso più semplice di tali superficie Σ è quello delle superficie di curvatura costante; il passaggio dall'una all'altra superficie della serie corrisponde alla trasformazione di Lie-Bonnet.

[1] Allora la superficie Σ sarebbe a curvatura nulla e la S sviluppabile, caso che naturalmente escludiamo.

[2] *Lezioni*, vol. II, pag. 43.

6. Come prima applicazione del metodo generale cerchiamo le coppie $(S, \overline{S})$ di superficie applicabili in guisa che le assintotiche di S si distendano sopra un sistema coniugato di $\overline{S}$; lo stesso accade allora distendendo $\overline{S}$ sopra S [1].

Nelle formule generali (6*) del n. 2 dovremo perciò introdurre la condizione

$$D\overline{D}'' + D''\overline{D} - 2D'\overline{D}' = 0,$$

la quale calcolata ci dà

$$\left(\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} - 1\right) \cdot \left(\frac{\mu^2}{\varrho_1 \varrho_2} + \lambda^2\right) = 0.$$

Ma il secondo fattore non può annullarsi, perchè allora la forma differenziale del secondo membro della (6) avrebbe nullo il discriminante, cioè $S, \overline{S}$ si ridurrebbero a linee. Sarà dunque necessario e sufficiente che si abbia $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = 1$; la superficie Σ è per ciò a curvatura assoluta $K = 2$, ossia è parallela e distante di $\frac{\pi}{4}$ da una superficie d'area minima. Per una tale superficie Σ possiamo porre, riferendola alle linee di curvatura

$$ds^2 = \frac{1}{2}(\operatorname{senh}^2\theta\, du^2 + \cosh^2\theta\, dv^2)$$

$$\frac{1}{\varrho_1} = \operatorname{tgh}\theta\ ,\ \frac{1}{\varrho_2} = \coth\theta\,,$$

essendo θ una soluzione dell'equazione a derivate parziali

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial v^2} + \operatorname{senh}\theta\cosh\theta = 0. \tag{10}$$

Allora la formola (6) n. 2 diventa

$$ds_1^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2\theta\, du^2 + 2\, du\, dv + \cosh 2\theta\, dv^2) \tag{11}$$

e l'equazione (*a*) per W diventa

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2} + \cosh 2\theta \cdot W = 0. \tag{12}$$

(1) L'esempio più semplice di tali coppie si ha nelle superficie d'area minima coniugate in applicabilità.

Ponendo

$$u_1 = \frac{u - v}{\sqrt{2}} \quad , \quad v_1 = \frac{u + v}{\sqrt{2}} ,$$

queste diventano

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial v_1^2} + \operatorname{senh} \theta \cosh \theta = 0 \tag{10*}$$

$$ds^2_1 = \operatorname{senh}^2 \theta \, du^2_1 + \cosh^2 \theta \, dv^2_1 \tag{11*}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u^2_1} + \frac{\partial^2 W}{\partial v^2_1} + \cosh 2\theta \, . \, W = 0 . \tag{12*}$$

Ora la (11*) coincide coll'elemento lineare sferico rappresentativo di una superficie S_0 di curvatura costante positiva dello spazio Euclideo, riferita alle sue linee di curvatura u_1 , v_1, e la (12*) è l'equazione delle deformazioni infinitesime di S_0. Da noti teoremi si conclude ora che la superficie S, inviluppo del piano di coordinate $(X_3 , Y_3 , Z_3 ; W)$, è l'*associata* di S_0 in una deformazione infinitesima. Così è stabilito il teorema:

Le superficie S *deformabili in guisa che le assintotiche di* S *diventino un sistema coniugato sulla deformata* $\overline{S}$, *sono tutte e sole le associate delle superficie* S_0 *di curvatura costante positiva nelle loro deformazioni infinitesime* (1).

È da osservarsi inoltre che le assintotiche di S corrispondono al sistema coniugato permanente nella deformazione infinitesima, e che il passaggio dalla S alla deformata $\overline{S}$ corrisponde alla trasformazione involutoria di Hazzidakis.

Applicando i noti risultati della teoria delle superficie di curvatura costante, potremo determinare con sole quadrature quante si vogliano coppie di superficie applicabili della specie considerata in questo numero.

7. Passiamo ora a studiare le coppie $(S , \overline{S})$ di superficie applicabili in guisa che le normali in punti corrispondenti $P , \overline{P}$ facciano fra loro un angolo σ costante. Il caso particolare in cui $\sigma = 0$, cioè le normali parallele, è ben noto (2); allora le superficie $S , \overline{S}$ sono ad area minima. Ciò segue anche dal nostro metodo attuale poichè, coincidendo le immagini di Clifford di Σ, questa è una sfera, e le formole (6), (6*) n. 2 dimostrano appunto che $S , \overline{S}$ sono ad area minima.

Sia ora $\sigma \neq 0$. Dobbiamo trovare in primo luogo le rappresentazioni equivalenti della sfera in cui due punti corrispondenti sono a distanza sferica costante σ. Se ricorriamo allo spazio ellittico, la questione si trasforma nell'altra di trovare le superficie Σ per le quali è costante l'angolo σ delle

(1) Il caso delle superficie d'area minima coniugate in applicabilità si ha dando ad S_0 la forma sferica.

(2) *Lezioni*, vol. II, § 344.

due parallele tirate per un punto fisso O alle varie normali di Σ. Occorre e basta perciò che queste normali distino da O della lunghezza costante $\delta = \frac{\sigma}{2}$, cioè tocchino una sfera di centro O e di raggio $R = \operatorname{tg} \frac{\sigma}{2}$. Dunque:

Le superficie Σ *richieste sono le evolventi delle sfere col centro in* O.

Così è risoluto geometricamente il problema di trovare le rappresentazioni equivalenti del piano ellittico (sfera euclidea) nelle quali le coppie di punti corrispondenti sono a distanza costante. Il problema d'applicabilità proposto è ora ridotto al problema d'integrazione della corrispondente equazione (a), che qui non verrà ulteriormente discusso.

Terminerò coll'osservare che il problema delle rappresentazioni equivalenti sopra considerate, si può generalizzare e risolvere direttamente sotto la forma seguente:

Trovare quelle rappresentazioni di una superficie di curvatura costante sopra sè stessa nelle quali sono soddisfatte le condizioni seguenti: 1° *le aree delle figure corrispondenti siano in rapporto costante* h; 2° *la distanza geodetica di due punti corrispondenti* $P, \overline{P}$ *sia costante* $= \sigma$.

Si dimostra facilmente che queste rappresentazioni si costruiscono, nel modo più generale, prendendo sulla superficie una serie ∞^1 arbitraria di circoli d'egual raggio e ad ogni punto P di un tale circolo facendo corrispondere quel punto $\overline{P}$ che si trova sulla geodetica normale al circolo, alla distanza σ da P. Per es., nel caso di un piano la formola che lega il raggio R del circolo alle costanti σ, h è data da $R = \frac{\sigma}{1 - h}$. Per le rappresentazioni equivalenti $(h = 1)$ la serie di circoli si muta in una serie ∞^1 arbitraria di rette.

Meccanica. — *Casi particolari del problema dei tre corpi.* Nota del Corrispondente Paolo Pizzetti.

Per tre corpi soggetti alle mutue attrazioni newtoniane, gli unici casi nei quali si mantengano invariati i rapporti fra le distanze sono, notoriamente, quelli in cui le posizioni e le velocità iniziali siano tali che i tre corpi, o si mantengano costantemente *allineati*, ovvero restino ai vertici di un *triangolo equilatero*. (Laplace, *Méc. Cél.* Livre X).

Il sig. Lehmann-Filhés (Astr. Nachr. 1891, n. 3033) ha dimostrato che, analogamente al 2° caso, *quattro corpi* [1], possono muoversi in guisa da essere costantemente vertici di un tetraedro regolare, e che, a generalizzazione del 1° caso, corpi in numero qualunque possono restare allineati man-

[1] Sottintendiamo qui e poi: corpi soggetti alle sole mutue attrazioni.

tenendo invariati i rapporti delle distanze. Il sig. Dziobek (Astr. Nachr. 1900, n. 3627) ha studiato casi interessanti di configurazioni piane di 4 corpi, per le quali può aver luogo il movimento omografico. Egli parte dall'osservare che il movimento è certamente omografico (salvo, ben inteso, le ovvie condizioni cui devono soddisfare le velocità iniziali) quando la configurazione sia tale che il potenziale delle mutue attrazioni Newtoniane abbia, in ogni istante, un valore identico a quello che esso avrebbe qualora la forza mutua fosse proporzionale alla semplice distanza. Non è però evidente *a priori* che sia questo l'unico modo per realizzare lo spostamento omografico.

Trattiamo qui generalmente e direttamente il problema del movimento omografico di n corpi attraentisi secondo la legge di Newton (la ricerca vale ugualmente per il caso in cui la forza sia proporzionale ad una potenza qualunque della distanza). Dimostriamo come, nel caso di corpi *non compiani*, l'unico modo di spostamento omografico è quello *omotetico* (centro di omotetia il centro generale di massa) e in particolare nel caso di *quattro* corpi, quello del *tetraedro regolare* studiato dal Lehmann-Filhés è l'*unico* possibile. Pel caso di corpi in uno stesso piano troveremo agevolmente risultati noti, e finalmente per n corpi in linea retta mostreremo come l'invariabilità dei rapporti delle distanze mutue sia (salvo un caso eccezionale) una *conseguenza necessaria* della ipotesi dell'allineamento. Per brevità di discorso ometteremo sempre, in quel che segue, di enunciare le condizioni relative alle velocità iniziali, le quali condizioni risultano evidenti nei singoli casi.

2. *Corpi non contenuti in uno stesso piano.* Rispetto ad assi cartesiani, di direzione invariabile, coll'origine nel centro generale di massa, siano x_i, y_i, z_i le coordinate della massa m_i al tempo t; A_i, B_i, C_i i valori di esse per $t = 0$. Siano poi $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ i coseni di direzione di una terna ortogonale mobile, invariabilmente legata alle rette che uniscono l'origine agli n corpi, e sia θ una funzione del tempo che ha il valore 1 per $t = 0$. Potremo scrivere, nell'ipotesi del movimento omografico:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_i = (\alpha_1 A_i + \alpha_2 B_i + \alpha_3 C_i)\,\theta\,, \\ y_i = (\beta_1 A_i + \beta_2 B_i + \beta_3 C_i)\,\theta\,, \\ z_i = (\gamma_1 A_i + \gamma_2 B_i + \gamma_3 C_i)\,\theta\,. \end{cases}$$

La equazione differenziale

$$(2) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{x_s - x_i}{\Delta_{si}^3} \qquad (s \neq i)$$

(assumiamo per semplicità uguale ad 1 la costante dell'attrazione) potrà scriversi

$$(2^*) \qquad A_i \frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2} + B_i \frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2} + C_i \frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2} =$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \sum_s m_s \frac{\alpha_1 (A_s - A_i) + \alpha_2 (B_s - B_i) + \alpha_3 (C_s - C_i)}{D_{si}^3}$$

Abbiamo qui indicato con D_{si} , Δ_{si} i valori, al tempo 0 e al tempo t rispettivamente, della distanza $(m_s\ m_i)$. Si ha evidentemente

$$\Delta_{si} = \theta\, D_{si} .$$

Scrivendo le altre due equazioni analoghe alla (2) e moltiplicando poi per $\alpha_1 , \beta_1 , \gamma_1$ e sommando si ha

$$(3) \qquad A_i \sum \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2} + B_i \sum \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2} + C_i \sum \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2} =$$

$$= \frac{1}{\theta^2} \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} \qquad (i = 1 , 2 \ldots n)$$

dove col simbolo S è indicata la sommatoria estesa alle tre lettere α , β , γ.

Poichè i corpi non sono in uno stesso piano, la matrice dei valori A_i , B_i , C_i $(i = 1 , 2 \ldots n)$ ha caratteristica 3. Quindi dalle equazioni (3) è lecito immaginar dedotti i valori delle quantità

$$(4) \qquad \theta^2 \sum \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_1)}{dt^2} \quad , \quad \theta^2 \sum \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_2)}{dt^2} \quad , \quad \theta^2 \sum \alpha_1 \frac{d^2(\theta\alpha_3)}{dt^2}$$

in funzione di quantità che sono indipendenti dal tempo; sicchè, perchè il movimento risulti omografico, occorre che le espressioni (4) si riducano a delle costanti. D'altra parte indicando con π , χ , ϱ le componenti, rispetto agli assi mobili, della velocità angolare di rotazione della terna mobile al tempo t, e valendosi delle note formole

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \varrho\, \alpha_2 - \chi\, \alpha_3 \qquad (1 , 2 , 3)\ (\pi , \chi , \varrho)$$

è facilissimo esprimere le (4) per mezzo delle π , χ , ϱ e delle loro derivate prime π' , χ' , ϱ' rispetto al tempo. Si hanno così le equazioni

$$(5) \qquad \begin{cases} \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2 + \chi^2) = a \\ -2\,\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = b \\ 2\,\theta^2\theta'\chi + \theta^3\chi' + \theta^3\varrho\pi = c \end{cases}$$

ove a , b , c sono costanti. Se invece che coi coefficienti $\alpha_1 , \beta_1 , \gamma_1$, si combinano le (2) coi coefficienti $\alpha_2 , \beta_2 , \gamma_2$ oppure con $\alpha_3 , \beta_3 , \gamma_3$, si ottengono

le altre sei equazioni

$$(5') \qquad \left\{ \begin{array}{r} 2\,\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = a' \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2 + \pi^2) = b' \\ -2\,\theta^2\theta'\pi - \theta^3\pi' + \theta^3\varrho\chi = c' \\ -2\,\theta^2\theta'\chi - \theta^3\chi' + \theta^3\pi\varrho = a'' \\ 2\,\theta^2\theta'\pi + \theta^3\pi' + \theta^3\chi\varrho = b'' \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\pi^2 + \chi^2) = c'' \end{array} \right.$$

Da tutte queste si deduce subito

$$\theta^3\pi\chi = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\chi\varrho = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\varrho\pi = \text{cost}$$

Sono quindi costanti i rapporti $\pi : \chi : \varrho$, ossia l'asse istantaneo di rotazione ha direzione invariabile rispetto agli assi mobili, e, per conseguenza anche rispetto agli assi fissi. Potremo dunque porre $\pi = \chi = 0$, assumendo l'asse delle z come asse di rotazione; con che le precedenti nove equazioni si ridurranno alle

$$\theta^2\theta'' = \text{cost} \quad , \quad 2\,\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\varrho^2 = \text{cost}$$

alle quali si può soddisfare soltanto in uno di questi due modi

$$(6) \qquad \begin{array}{ll} \text{I°} & \left\{ \begin{array}{l} \varrho = 0 \\ \theta^2\theta'' = \text{cost} \end{array} \right. \\ \text{II°} & \left\{ \begin{array}{l} \varrho = \text{cost} \\ \theta = \text{cost} \end{array} \right. \end{array}$$

il primo dei quali corrisponde a un semplice moto dilatatorio, omotetico, pel quale ognuno dei corpi si muove sulla retta che lo unisce al baricentro generale; il secondo corrisponde a un moto *rigido* di rotazione uniforme attorno all'asse z. Cominciamo dall'escludere subito questa seconda soluzione. Poichè la equazione differenziale

$$\frac{d^2z_i}{dx^2} = \sum_s m_s \frac{z_s - z_i}{\Delta_{si}^3}$$

darebbe in questo caso

$$(7) \qquad 0 = \sum_s m_s \frac{C_s - C_i}{D_{si}^3} \qquad (s \neq i)$$

Ora, i corpi non essendo compiani, ve ne sarà uno pel quale la C_i ha valore

massimo (o maggiore di tutte le altre C, o per lo meno uguale alla C di alcuni altri corpi e maggiore di quella dei rimanenti). Per un tal corpo i termini nella sommatoria son tutti negativi (o per lo meno alcuni nulli, altri negativi) epperò la (7) non può essere soddisfatta.

L'unico possibile caso di movimento omografico, per corpi non compiani, è dunque quello *omotetico* espresso dalla soluzione (6). Possiamo allora sostituire alle (1) le equazioni

$$x_i = \theta A_i \quad , \quad y_i = \theta B_i \quad , \quad z_i = \theta C_i$$

e le (2) diventano

$$A_i \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{\theta^2} \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} \tag{8}$$

Astrazion fatta dalle ovvie condizioni relative alle velocità iniziali, condizione necessaria e sufficiente perchè il movimento si verifichi nel modo richiesto, è quindi che si abbia

$$\frac{1}{A_i} \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} = \frac{1}{B_i} \sum_s m_s \frac{B_s - B_i}{D_{si}^3} = \frac{1}{C_i} \sum_s m_s \frac{C_s - C_i}{D_{si}^3} \tag{9}$$

e che il valor comune di questi tre rapporti sia indipendente dall'indice i. Abbiamo dunque $3n - 1$ equazioni di condizione fra le A_i, B_i, C_i. La condizione che l'origine delle coordinate sia il centro di massa è inclusa in quelle. Infatti, posto

$$\theta^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -K , \tag{10}$$

le (8) (9) possono scriversi

$$\begin{cases} \sum_s m_s \dfrac{A_s - A_i}{D_{si}^3} = -K A_i \\ \sum_s m_s \dfrac{B_s - B_i}{D_{si}^3} = -K B_i \\ \sum_s m_s \dfrac{C_s - C_i}{D_{si}^3} = -K C_i \end{cases} \tag{11}$$

le quali moltiplicate per m_i e sommate rispetto all'indice i danno

$$\sum_i m_i A_i = \sum_i m_i B_i = \sum_i m_i C_i = 0 \tag{12}$$

Dette R, R_0 le distanze di uno qualsiasi dei corpi dall'origine, ai tempi t e *zero* rispᵉ., la (10) può scriversi

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{K R_0^3}{R^2} . \tag{13}$$

Ognuno dei corpi si muove dunque verso il centro di massa, come se ivi fosse concentrata una massa $K R_0^3$.

3. *Casi particolari.* Per $n = 4$, assumiamo il piano $z\,y$ parallelo a quello dei tre corpi m_1, m_2, m_3 per modo che $A_1 = A_2 = A_3$. Allora la prima delle equazioni (11), postovi successivamente $i = 1, 2, 3$, dà

$$m_4 \frac{A_4 - A_1}{D_{14}^3} = - K A_1 \quad , \quad m_4 \frac{A_4 - A_2}{D_{24}^3} = - K A_2 \quad , \quad m_4 \frac{A_4 - A_3}{D_{34}^3} = - K A_3$$

quindi

$$D_{14} = D_{24} = D_{34}$$

Similmente si proverebbe, che $D_{13} = D_{23} = D_{43}$ ecc., sicchè il tetraedro dev' essere *regolare.*

Chiamando D il lato del tetraedro, e lasciando nuovamente arbitraria l' orientazione dei piani coordinati, è facile vedere, tenuto conto delle (12), che le equazioni (11) si riducono tutte a questa unica

$$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = K D^3$$

la quale determina la costante K da introdurre nella equazione differenziale (13).

Per $n = 8$, se si pone a priori la condizione che i corpi si trovino ai vertici di un parallelepipedo rettangolare, si trova facilmente che la cosa non può verificarsi se non quando i lati sieno eguali, e le 8 masse pure tra loro eguali. Per un ottaedro ($n = 6$) avente tre piani ortogonali di simmetria, le masse devono essere uguali in due vertici opposti, e le condizioni (11) possono essere soddisfatte da valori positivi delle masse, purchè il rapporto fra la più lunga e la più corta diagonale sia $< \sqrt{3}$.

4. *Casi di n corpi in uno stesso piano.* Assunto come piano $x\,y$ quello nel quale, per $t = 0$, si trovano gli n corpi, e considerata, come nel n. 2, una terna ortogonale rigidamente connessa ai raggi projettanti i corpi dal centro di massa, le coordinate della massa m_i al tempo t saranno esprimibili con

$$(14) \qquad \begin{cases} x_i = (\alpha_1 A_i + \alpha_2 B_i)\,\theta \\ y_i = (\beta_1 A_i + \beta_2 B_i)\,\theta \\ z_i = (\gamma_1 A_i + \gamma_2 B_i)\,\theta \end{cases}$$

ove $A_i, B_i, 0$ sono i valori delle coordinate stesse per $t = 0$. In modo analogo a quello seguito nel n. 2, otteniamo qui, in luogo delle *nove* equa-

zioni (5) (5′), le sei equazioni

$$(15)\qquad \begin{cases} \theta^2\theta'' - \theta^3(\chi^2 + \varrho^2) = a \\ -2\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = b \\ 2\theta^2\theta'\varrho + \theta^3\varrho' + \theta^3\pi\chi = a' \\ \theta^2\theta'' - \theta^3(\varrho^2 + \pi^2) = b' \\ -2\theta^2\theta'\chi - \theta^3\chi' + \theta^3\varrho\pi = 0 \\ 2\theta^2\theta'\pi + \theta^3\pi' + \theta^3\chi\varrho = 0 \end{cases}$$

delle quali la 1ª paragonata colla 4ª, la 2ª colla 3ª, danno

$$\theta^3(\chi^2 - \pi^2) = \text{cost} \quad , \quad \theta^3\pi\chi = \text{cost}$$

quindi: $\dfrac{\chi^2 - \pi^2}{\pi\chi} = \text{cost}$, donde $\dfrac{\pi}{\chi} = \text{cost}$. Se si conviene che il piano $z\,y$ contenga inizialmente l'asse istantaneo di rotazione, potremo quindi porre $\pi = 0$, con che la ultima (15) dà $\chi = 0$ ovvero $\varrho = 0$.

I. Supposto $\pi = 0$, $\varrho = 0$, $\chi \neq 0$, le (15) si riducono a $\theta^2\theta'' = \text{cost}$, $\theta^3\chi^2 = \text{cost}$, $2\theta'\chi + \theta\chi' = 0$ e possono essere soddisfatte solo ponendo $\chi = \text{cost}$, $\theta = \text{cost}$. Ciò equivale ad una rotazione rigida uniforme attorno all'asse y. Si avrebbe quindi $y_i = \mathrm{B}_i$ e la seconda equazione differenziale del movimento della massa m_i darebbe

$$0 = \sum_s m_s \frac{\mathrm{B}_s - \mathrm{B}_i}{\mathrm{D}_{si}^3}$$

la quale, come già si disse a proposito della equazione (7), non può essere soddisfatta per tutti i valori dell'indice i. Dobbiamo dunque escludere questo caso.

II. Supposto $\pi = 0$, $\chi = 0$, la rotazione avviene attorno all'asse delle z. Le (14) assumeranno la forma

$$(16)\qquad \begin{cases} x_i = \theta\mathrm{A}_i\cos\alpha - \theta\mathrm{B}_i\,\mathrm{sen}\,\alpha \\ y_i = \theta\mathrm{A}_i\,\mathrm{sen}\,\alpha + \theta\mathrm{B}_i\cos\alpha \end{cases} \qquad z_i = 0$$

ove α è un angolo variabile la cui derivata rispetto al tempo è ϱ. Le (15) si riducono a

$$(17)\qquad \begin{cases} \theta^2\theta'' - \theta^3\varrho^2 = a \\ 2\theta^2\theta'\varrho - \theta^3\varrho' = b \end{cases}$$

ove è facile vedere che, pel teorema della conservazione delle aree, la costante b è nulla.

Derivando le (16) tenuto conto delle (17), si ha quindi

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{a\, x_i}{\theta^3} & \dfrac{d^2 y_i}{dt^2} = \dfrac{a\, y_i}{\theta^3} \end{cases}$$

Il movimento di ognuno dei corpi, relativamente al centro di massa, è dunque Kepleriano. Sostituendo nelle (18) ai primi membri le espressioni date dalla equazione differenziale (2) ed analoghe, abbiamo le equazioni di condizione cui deve soddisfare la configurazione iniziale

$$(19) \qquad \sum_s m_s \frac{A_s - A_i}{D_{si}^3} = a\, A_1 \qquad \sum_s m_s \frac{B_s - B_i}{D_{si}^3} = a\, B_i$$

Pel caso di *tre* corpi, assunto l'asse y parallelo alla congiungente delle posizioni iniziali di m_1, m_2, abbiamo $A_1 = A_2$ e le (19) danno

$$m_3 \frac{A_3 - A_1}{D_{13}^3} = a\, A_1 \qquad m_3 \frac{A_3 - A_2}{D_{23}^3} = a\, A_2$$

donde $D_{13} = D_{23}$. Similmente $D_{12} = D_{32}$; il triangolo deve essere *equilatero*, com'è noto.

Le (17) sono soddisfatte, in particolare, col porre $\theta = 1$, $\varrho^2 =$ costante $= -a$. Se dunque la configurazione iniziale soddisfà alle (19), e se la velocità iniziale di rotazione è $= \sqrt{-a}$, il moto è rigido e la velocità di rotazione è costante.

5. *Caso degli n corpi allineati.* Senza mettere a priori la condizione che il movimento sia omografico, porremo

$$(20) \qquad x_i = \alpha\, \theta_i \quad , \quad y_i = \beta \theta_i \quad , \quad z_i = \gamma\, \theta_i$$

ove α, β, γ sono i coseni di direzione della retta che contiene gli n corpi, e le θ_1, $\theta_2 \ldots \theta_n$ sono certe funzioni del tempo. Sostituendo le espressioni (20) nelle equazioni differenziali

$$(21) \qquad \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{x_s - x_i}{\Delta_{si}^3} \quad , \quad \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_s m_s \frac{y_s - y_i}{\Delta_{si}^3} ,$$

moltiplicando la 1ª per β, la 2ª per α e sottraendo:

$$(22) \qquad \theta_i \left(\beta \frac{d^2 \alpha}{dt^2} - \alpha \frac{d^2 \beta}{dt^2} \right) + 2 \frac{d\theta_i}{dt} \left(\beta \frac{d\alpha}{dt} - \alpha \frac{d\beta}{dt} \right) = 0$$

Escludendo il caso in cui ciascuno dei binomii

$$\beta\frac{d\alpha}{dt} - \alpha\frac{d\beta}{dt} \quad , \quad \gamma\frac{d\beta}{dt} - \beta\frac{d\gamma}{dt} \quad , \quad \alpha\frac{d\gamma}{dt} - \gamma\frac{d\alpha}{dt}$$

sia nullo, il che si verifica sol quando la retta si muova parallelamente a sè stessa, la (22) richiede che il rapporto

$$\frac{1}{\theta_i}\frac{d\theta_i}{dt}$$

abbia un valore indipendente dall'indice i, il che è quanto dire che i rapporti

$$\theta_1 : \theta_2 : \ldots : \theta_n$$

rimangano invariati col tempo. Il movimento è dunque necessariamente omografico. Poniamo pertanto

$$\theta_1 = h_1\,\theta \quad , \quad \theta_2 = h_2\,\theta \quad , \quad \ldots\,\theta_n = h_n\,\theta$$

dove θ è una funzione del tempo, che ha il valore 1 per $t = 0$, e $h_1, h_2 \ldots h_n$ sono costanti tali che

$$\sum_i m_i\,h_i = 0\,. \tag{23}$$

Supposti i corpi allineati nell'ordine $1, 2 \ldots n$, e ammesso che i coseni α, β, γ siano relativi alla retta percorsa da 1 verso n, avremo

$$\Delta_{si} = \pm\,(h_s - h_i)$$

dove si ha da scegliere il segno $+$ o $-$, secondo che s è $>$ o $<$ i.

La (21) può allora scriversi

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = \frac{x_i}{(\theta h_i)^3}\sum_s \frac{\pm\,m_s\,h_i^2}{(h_s - h_i)^2}$$

od anche

$$h_i\,\frac{d^2(\alpha\theta)}{dt^2} = \frac{\alpha}{\theta^2}\sum_s \frac{\pm\,m_s}{(h_s - h_i)^2}$$

La prima di queste esprime che il movimento di ogni corpo rispetto al centro di massa è Kepleriano.

La seconda mostra che le posizioni iniziali dei corpi devono esser tali che il rapporto

$$\frac{1}{h_i}\sum_s \frac{\pm\,m_s}{(h_s - h_i)^2}$$

sia indipendente da i, il che ha luogo ad $n-1$ equazioni di condizione, delle quali, com'è facile vedere, la (23) è conseguenza identica.

Nel caso di *tre* corpi, tali condizioni possono ridursi alle due

$$\frac{h_2 m_2}{(h_2-h_1)^2}+\frac{h_2 m_3}{(h_3-h_1)^2}=-\frac{h_1 m_1}{(h_1-h_2)^2}+\frac{h_1 m_3}{(h_3-h_2)^2}$$

$$m_1 h_1 + m_2 h_2 + m_3 h_3 = 0 \tag{24}$$

la prima delle quali, tenuto conto della seconda, può scriversi

$$\frac{h_1}{(h_3-h_2)^2}-\frac{h_2}{(h_1-h_3)^2}+\frac{h_3}{(h_2-h_1)^2}=0. \tag{25}$$

Assumiamo come unità di lunghezza la distanza $(m_1 m_2)$ ponendo

$$h_2-h_1=1 \quad , \quad h_3-h_2=h \quad , \quad h_3-h_1=h+1 \tag{26}$$

La (24) dà allora

$$h_1=-\frac{m_2+m_3(h+1)}{m_1+m_2+m_3}$$

Ricavando quindi dalle (26) h_2, h_3 in funzione di h e sostituendole nella (25), questa sbarazzata dai denominatori si riduce alla nota forma

$$(m_2+m_3)+h(2m_2+3m_3)+h^2(m_2+3m_3)- \\ -h^3(m_2+3m_1)-h^4(2m_2+3m_1)\,h^5(m_2+m_1)=0\,.$$

Parassitologia. — *Ricerche preliminari dirette a precisare la causa del gozzo e del cretinismo endemici.* Seconda Nota preliminare del Socio B. Grassi e del dott. L. Munaron.

Fisiologia. — *L'immunità acquisita contro i veleni, può essere trasmessa dai genitori alla prole? (Contributo alle conoscenze sulla trasmissione di caratteri acquisiti. Ricerche sperimentali).* Nota del Corrispondente A. Lustig.

Matematica. — *Sur la multiplication de deux séries de factorielles.* Nota di Niels Nielsen, presentata dal Socio U. Dini.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Storia della scienza. — *Di Nicolò Tartaglia: frammenti di nuove ricerche.* Nota dell' ing. V. Tonni-Bazza [1], presentata dal Socio V. Cerruti.

Troppo scarse sono le notizie rimaste del grande matematico bresciano, specialmente per quanto riguarda la sua famiglia, per poterne scrivere ora una biografia, la quale venga a colmare tutte le lacune fin quì rimaste. Ci sembra pertanto che meritino di essere riportati alcuni brevi frammenti di nuove ricerche, che hanno messo in luce una lettera del Tartaglia e l' inventario dei beni di lui.

La lettera è un' istanza al Doge ed alla Signoria veneta: essa si conserva nell'Archivio di Stato di Venezia [2], e poichè, probabilmente, essa è autografa, il suo interesse viene accresciuto, in quanto che nulla posseggono oramai le biblioteche italiane dei manoscritti del Tartaglia. Ed anche nelle biblioteche degli altri paesi, difficilmente se ne potranno trovare per il fatto che lo stesso manoscritto del Trattato *De Numeris et Mensuris*, che si conserva nella biblioteca *Bodleyana* di Oxford, fin qui ritenuto autografo, forse non lo è.

La istanza in parola è in scrittura grande, regolare, chiara; e nello stesso volume in cui è inserita, a carta 197^{a-b}, in data 28 agosto 1546 si legge il decreto con cui essa veniva accolta: decreto che accordava il chiesto privilegio, insieme ad altri consimili che erano domandati da autori od editori.

Una copia di tale decreto si trova inserita nel volume Senato Terra 1545-46, registro 34, a c. 139^{a-b}.

Come si rileva dal suo contenuto, il privilegio domandato concerneva la stampa dell'opera *Quesiti et inuentioni diuerse*, che apparve difatti per la prima volta nel 1546, l'anno in cui fu appunto emanato il decreto.

In questa pubblicazione, che è la più geniale del Tartaglia, questi rivendicò a sè il merito della risoluzione delle equazioni di terzo grado, riproducendo integralmente varie lettere del Cardano e le relative risposte, ricostruendo la abilissima manovra, con la quale il matematico milanese era riuscito a carpirgli la invenzione preziosa. E fu anzi per questa narrazione, che seguirono poi le sfide famose scambiate col Cardano e col Ferrari.

Ciò che colpisce l'attenzione, nella lettera del Tartaglia, la quale non porta nè data, nè firma, è la locuzione per « me nuovamente composta » con che egli designa la opera che intende stampare: il che potrebbe far credere che non si tratti della stampa della prima edizione dei *Quesiti et inuentioni*,

(1) Presentata nella seduta del 20 dicembre 1903.

(2) Senato Terra, filza 3 (da marzo a dicembre 1546), carta 203ª.

avvenuta nel 1546, ma bensì della ristampa seguita nel 1554. La parola « novamente » però, come ci fece osservare il chiño prof. Antonio Favaro, si trova ripetuta in molte stampe del XVI° e XVII° secolo, per significare non già « di nuovo » nel senso cioè di lasciare supporre una stampa precedente, ma « per la prima volta ». Per cui il dubbio che la lettera possa essere del 1554 e non del 1546, e ciò sebbene essa sia inserita nel volume che contiene solo documenti riferentisi al 1546, non avrebbe più ragione di essere; e, la istanza che qui sotto riportiamo integralmente, concerne adunque la pubblicazione della prima edizione dei famosi *Quesiti et inuentioni*.

« Ser.^{mo} Principe et Ill.^{ma} Signoria,

« Essendo Io Nicolo Tartalea Bressano (fidelissimo servitore di vostra Celsitudine) al presente p far stampare una mia operetta, per me novamente composta Intitolata Quesiti et Inventioni diverse, et dubitandomi da poi che sia stampata, che alcun'altra persona nella faccia restampar, il che facendo mene seguiria daño grandissimo, E pero humilmēte ricorro alli piedi di vostra Sublimita, supplicandola che per la Immēsa sua humanita ne conceda gratia, che a me solo supplicante sia licito di poter far stampare la detta opera p añi X et che alcun altro in detto tempo ño possa restampare, ne far restampare la predetta opera, (nè etia parte di quella) in Venetia ne in alcun altro luoco over terra del dominio Veneto, ne etià stampate altrove in esse terre portar, vendere ne far vendere in detto tempo sotto pena de ducati 300 et perdere li libri, Et terzo della qual pena sia applicata al Arsenale, et un terzo sia del Magistrato, over rectore del luoco, dove sara fatta la essecutione, et laltro terzo sia del denontiante et sia tenuto secreto, et questo adimādo di special gratia a vostra altezza alla quale reverentemente me aricomando ».

Un altro documento, fin qui inedito, che pure esiste nell'archivio di Stato di Venezia (1), è l'inventario dei beni posseduti dal Tartaglia.

Il 13 dicembre 1557, a soli cinquantasette anni, il grande precursore di Galileo moriva.

Tre giorni innanzi egli aveva dettato il suo testamento, il quale mette in evidenza lo stato di povertà in cui si trovava uno dei più benemeriti cultori della scienza, alla fine di una vita tutta dolorose vicende e consacrata alla scienza.

E il 16 dicembre, lo stesso notaio che aveva rogato il testamento, stese l'inventario dei libri; ed il dì successivo l'inventario dei mobili e degli indumenti appartenuti al Tartaglia.

Codesto non breve inventario è lo sfondo di un quadro, a linee incerte, ma di cui il soggetto ci sconforta e rattrista.

Sono i libri e le poche suppellettili appartenute all' insigne Maestro, che vengono elencate in una lunga litania, in cui troppo spesso si ripetono le parole « logoro », « strazzado », « vecchissimo »; è una squallida abitazione povera ed angusta di uno dei quartieri più popolari della bella Venezia, che

(1) Atti del veneto notaio Rocco de Benedetti, 1556-1558, vol. primo, carte 357.

ci si presenta alla immaginazione nella sua fredda tristezza: e, fra questa desolazione, la figura del Grande ci appare ancor più severa e raggiante.

Alla solita formula sacramentale di premessa:

Die Jovis XVI Decembris in domo habitationis infrascripti D. Troiani commissarij posita in confinio Sancti Salvatoris. Inventarium librorum omnium quondam dom.ni Nicolai Tartalea Doctoris Mathematicarum quondam domini Michaelis de Brixia factum ad instantiam Domini Traiani Navò Bibliopolo ad insigne Leonis in Marzaria eius commissarij vigore sui testamenti rogati penes me Notarium sub die decimo mensis Decembris...

segue l'inventario dei libri, indi quello dei mobili, redatto l'indomani: —

Die Veneris XVII dicti. Indomo habitationis defuncti posita in confinio Sancti Silvestri —

esistenti in « la sua camereta » in « cosina », in « portegheto » ed in « magazen ».

Ciò che abbonda, come abbiamo detto, in questo inventario, sono gli aggettivi « strazzado » e « vecchissimo », che seguono al nome degli oggetti nominati. E poichè ciò non era detto certamente per una prudente cautela verso le eccessive pretese fiscali, anche l'inventario, ci dimostra in quale stato di estrema povertà si trovasse il Tartaglia.

Questo documento pare quasi la continuazione del testamento — col quale egli non si trova in grado che di disporre di molti libri, ma vuole nullameno ricordati tutti: i famigliari, i librai che stamparono le sue opere, e persino Lucia sua *massara*. — E, per chi ricorda la vita bresciana del Cinquecento, così feconda di uomini che tanta gloria rifulsero sul nome d'Italia, esso accentua l'analogia di sorte che fu comune al matematico e ad un grande pittore: Alessandro Bonvicino.

Fu, il Bonvicino, quel mite spirito asceta che, in mezzo alla profana giocondità del suo secolo, seppe far vivere tante e tante belle teste di madonne e di santi, nelle cento e più tele che adornano le chiese bresciane e nelle molte che volarono oltr'Alpe, spesso credute del sommo Raffaello. E di lui, che fu soprannominato il Moretto, si conserva una *polizza d'estimo*, in cui egli parla delle strettezze in cui versa, e dei numerosi famigliari ai quali tutti, egli solo, deve provvedere cogli esigui guadagni.

Strane coincidenze della sorte! E dire che questi due grandi bresciani, forse, non si saranno nemmeno conosciuti, sebbene entrambi cresciuti in Brescia dove vissero i primi anni della fanciullezza; entrambi spettatori del tremendo eccidio del Foix, nel quale il dodicenne Nicolò, il povero figlio di *ser Micheletto Cavallaro*, corse così terribile pericolo di vita.

Forse non si saranno nemmeno conosciuti davvicino. Ma, certamente, le disavventure toccate al matematico, quando richiamato in patria, anche fra i proprî concittadini dovette sopportare i colpi dell'avversa fortuna, non

potevano essere ignote al pittore. E chi sa che, questi, nella infinita bontà dell'animo, non se ne sia doluto; giacchè par quasi che abbia dipinto talune di quelle belle teste di santi barbuti, che dalle sue tele superbe guardano severamente, ma non senza dolcezza, colla immagine viva e fissa in mente del concittadino tanto perseguitato dalla sventura, e pure sempre così rassegnato!...

Chimica. — *Studio dell'acido cloridrico liquido come solvente elettrolitico.* Nota di D. Helbig e G. Fausti, presentata dal Socio S. Cannizzaro.

Della serie di studî, oramai numerosi, i quali indagano dal punto di vista elettrolitico il comportamento di solventi differenti dall'acqua non fa parte, a nostro sapere, alcuno che consideri l'acido cloridrico liquido. L'unico accenno relativo alla questione si trova in una Memoria di Hittorf (Wied. Ann. 3, 374) il quale autore si limita a constatare che l'acido cloridrico liquido non conduce la corrente elettrica.

Se è poco studiato l'acido cloridrico liquido, ben poco è stato fatto relativamente allo studio elettrolitico degli altri idracidi liquefatti. Ricorderemo a questo proposito le classiche ricerche di Moissan il quale, a proposito della preparazione del fluoro libero trovò che l'acido fluoridrico liquido a — 23° non è conduttore della corrente, ma che lo diventa dopo avervi disciolto un fluoridrato alcalino; ricorderemo anche le belle ricerche di Kahlenberg e Schlund (1) sull'acido cianidrico liquido: questo corpo scioglie numerose sostanze, le quali disciolte in acqua darebbero soluzioni buone conduttrici; le soluzioni in acido cianidrico liquido conducono non solo, ma l'acido cianidrico è addirittura quel solvente che fra tutti presenta il maggior potere dissociante.

In considerazione di questi pochi, ma interessanti fatti, ci è sembrato indicato di intraprendere alcune ricerche sul comportamento dell'acido cloridrico liquido come solvente; per quanto queste ricerche non siano ancora giunte a compimento, ne pubblichiamo fin d'ora i primi risultati, poichè nei Proceedings of the chemical Society del 15 novembre 1903 troviamo a pag. 220 una Nota preliminare dei sigg. B. D. Steele e D. Mc. Intosh, i quali chimici riferiscono su di alcune ricerche da essi intraprese nello stesso senso.

Preparazione dell'acido cloridrico secco. — L'acido cloridrico adoperato si preparò facendo reagire sul cloruro di sodio previamente fuso, l'acido solfo-

(1) Journ. of phys. chem., vol. VI, n. 7, pag. 462.

rico concentrato e puro; il gas così ottenuto era fatto passare successivamente in una boccia di lavaggio contenente acido solforico, e per una serie di tubi ad U contenenti rispettivamente cloruro di calcio, pomice solforica, e pentossido di fosforo. Che quest'ultimo agente di essiccazione, efficacissimo fra tutti, si possa impiegare per l'acido cloridrico, senza timore d'inquinare quest'ultimo, lo dimostrò Baker (1); secondo questo autore un assorbimento del gas acido cloridrico da parte del pentossido avviene soltanto quando l'essiccamento preliminare sia stato male effettuato, oppure quando l'anidride fosforica contenga impurezze o traccie di acido metafosforico.

In opposizione a ciò il Gutman (2), sostiene che l'acido cloridrico non può essiccarsi sul pentossido di fosforo poichè si combinerebbe con esso, formando acido metafosforico e ossicloruro di fosforo: alla quale supposizione Baker risponde facendo notare che, dato anche che queste sostanze si formino, non nuocciono, essendo anche esse agenti disidratanti: tanto è vero che egli asserisce di avere ottenuto, in queste condizioni, dell'acido cloridrico incapace di combinarsi con gas ammoniaco perfettamente secco. La nostra disposizione sperimentale permette del resto, come si vedrà, di eliminare le cause d'errore derivanti da ossicloruro di fosforo eventualmente formato e trascinato dal gas acido cloridrico.

Apparecchio per la preparazione dell'acido cloridrico liquido. — Il recipiente cilindrico di vetro (3) (vedi figura) portante in fondo un elettrodo di platino (dischetto di 13 mm. di diametro) è isolato termicamente dall'ambiente per mezzo di un cilindro Dewar (4), attraversato anch'esso in fondo da un filo di platino, che va a far contatto mediante poco mercurio col filo che sorregge l'elettrodo (5).

Per evitare la condensazione dell'umidità atmosferica sulle pareti esterne del cilindro Dewar, condensazione inevitabile per la bassa temperatura che il cilindro viene ad assumere a causa del successivo raffreddamento, il cilindro è racchiuso in un bottiglione a collo largo sul cui fondo è deposto un abbondante strato di cloruro di calcio.

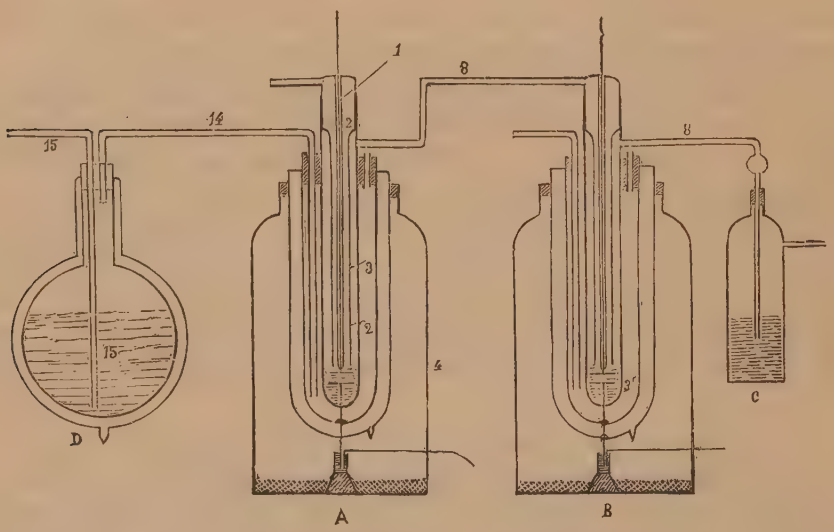
La comunicazione dell'elettrodo con l'esterno è assicurata da un pozzuolo di vetro contenente mercurio, fissato sul fondo del bottiglione; in esso pescano, tanto la estremità del filo di platino sporgente sul cilindro Dewar, come anche un filo di ferro (7) che passa attraverso alla parete del bottiglione.

Nel tubo (3) penetra a perfetta tenuta (chiusura a smeriglio) il tubo (2): questo è attraversato nella sua lunghezza da un tubicino (1) il quale alla sua estremità inferiore porta saldato il secondo elettrodo di platino, identico al primo e distante 1 cm. circa da questo. Il tubicino (1) con la sua estremità superiore rimasta aperta è saldato nel vetro del tubo (13). La comunicazione

(1) Journ. of the chemical Society, vol. LXXIII, pag. 422.
(2) Liebig. Ann. 299, 266.

elettrica dell'elettrodo con l'esterno è ottenuta per mezzo di un filo di ferro infilato nel tubicino (1) e che pesca in poco mercurio il quale cuopre il filo di platino che sorregge l'elettrodo.

Per mezzo di un tubo (8) un secondo apparecchio (B) identico al precedente era messo in comunicazione con esso. Questo secondo apparecchio differiva dal primo per il fatto che il tubo (3) portava una tubulatura late-



rale (non disegnata in figura), chiusa con tappo a smeriglio, attraverso alla quale si poteva far arrivare nel tubo (3′) la sostanza che si doveva sciogliere nell'acido cloridrico liquido. Il tubo di sviluppo (8′) dell'apparecchio (B) comunicava con una piccola boccia di lavaggio (c) contenente acido solforico, destinata ad evitare la rientrata della umidità atmosferica nell'apparecchio. Fra (10) e (c) era intercalata una bolla la cui funzione era d'impedire all'acido solforico di arrivare nel cilindro (3′), in caso che la pressione dell'interno di esso calasse al disotto di quella atmosferica.

Analogamente a ciò che si pratica per la determinazione della conducibilità di soluzioni acquose, per evitare errori derivanti da fenomeni di polarizzazione, i due dischetti fungenti da elettrodo si coprirono con nero di platino adoperandoli alternativamente come anodo e catodo in una soluzione acquosa contenente il 4 % di cloruro platinico ed 1/10 % di acetato di piombo. Dopo la platinatura si procedette sempre alle operazioni necessarie per eliminare dagli elettrodi le impurezze che potevano esservi rimaste (vedi Ostwald-Luther, Phys. Chem. Messungen).

Come vedremo, la conducibilità dell'acido cloridrico liquido è di un ordine estremamente basso; tenuto conto di ciò, assai probabilmente la platinatura nel nostro caso costituisce un eccesso di precauzione. Difatti Kohl-

rausch per l'acqua purissima ottenne buone misure anche con l'impiego di elettrodi non platinati.

Metodo di raffreddamento. — Per ottenere la temperatura di 80°,3 (ebollizione dell'acido cloridrico liquido a pressione ordinaria) e mantenerla costante per tutta la durata delle misure, ricorremmo ad un metodo escogitato da Helbig, metodo il quale soddisfece completamente alle condizioni richieste.

Un pallone Dewar (D) pieno per due terzi circa di aria liquida, è chiuso da un tappo a due fori attraversati l'uno da un tubo (15) che arriva sino in fondo al pallone, l'altro da un tubo di sviluppo comunicante col tubo (14), il quale penetra fin quasi al fondo del tubo Dewar (4).

Una corrente d'aria secca fornita da un cilindro d'acciaio, nel quale essa era stata previamente compressa a 80 atmosfere, penetrava nel pallone (D) dal tubo (15) e veniva a gorgogliare nell'aria liquida in esso contenuta. Dal tubo (14) si ha allora una corrente d'aria fortemente raffreddata, la quale raffredda a sua volta tutta la capacità interna del tubo Dewar (4). Il tubo (14) era protetto dal calore dell'ambiente per mezzo di uno spesso involucro di lana.

Una volta ottenuto il necessario abbassamento di temperatura, questa si può mantenere costante a qualunque altezza e dentro il limite di due gradi, col regolare opportunamente la corrente d'aria per mezzo della valvola del cilindro ad aria compressa.

Parte elettrica. — Alcune esperienze preliminari ci dimostrarono che la conducibilità dell'acido cloridrico liquido era talmente bassa, da non permettere l'impiego del ponte di Kohlrausch, col quale si possono misurare solo conducibilità comprese fra 10 e 10000 ohm. Dovemmo allora ricorrere ad un ponte di Wheatstone i cui tre lati erano costituiti da due reostati che arrivavano ciascuno sino a 100000 ohm, ed un terzo che andava a 10000 ohm. La corrente di misura ci veniva fornita da due coppie di accumulatori: per evitare possibili fenomeni di polarizzazione, impiegammo correnti di brevissima durata (1/100 circa di secondo) che ottenevamo per mezzo di un pendolo munito inferiormente d'una punta metallica, la quale durante l'oscillazione chiudeva per un istante il circuito con lo sfiorare il mercurio contenuto in un pozzuolo praticato in un blocco di paraffina; inoltre il senso della corrente veniva invertito, fra una oscillazione e l'altra, per mezzo di una « Wippe ».

Il galvanometro usato era un Thomson a 4 bobine [1], istrumento il quale, a causa della sua squisita sensibilità e della massa minima dell'equi-

[1] Quest'apparecchio, insieme con due dei suddetti reostati, ci venne gentilmente imprestato dal prof. M. Ascoli della R. Scuola Ingegneri, al quale teniamo ad esprimere i nostri più sentiti ringraziamenti.

paggio mobile, si prestava ottimamente pel caso nostro. Sempre a causa della grande resistenza dell'acido cloridrico liquido, furono prese speciali precauzioni per l'isolamento elettrico di quelle parti di tutta la disposizione d'apparecchi che venivano a partecipare alla misura della resistenza.

La disposizione stessa delle cellule elettrolitiche (3) e (3') era tale da escludere qualunque errore dovuto, sia alla conducibilità stessa del vetro, sia ad uno strato esterno di impurezze eventualmente aderenti ad esso. Questo risultato ci fu confermato da alcune esperienze praticate sulle cellule vuote, la cui resistenza si mostrò di un ordine assai superiore a quello misurabile con la descritta disposizione sperimentale.

Modo di condurre l'esperienza. — Gli apparecchi erano prima di ogni esperienza accuratamente seccati, col farci passare per più di 24 ore aria asciugata per mezzo di una serie di tubi ad U, contenenti cloruro di calcio, pomice solforica ed anidride fosforica.

Si incominciava col liquefare l'acido cloridrico nel cilindro (3) (cellula (a)) raffreddando la capacità del Dewar (4) col metodo descritto. Quando l'elettrodo superiore era coperto dal liquido per circa 2 centimetri, si chiudeva la comunicazione fra il generatore di acido cloridrico e l'apparecchio (a) per mezzo di un rubinetto a tre vie intercalato fra l'apparecchio generatore di gas acido cloridrico ed i tubi disseccanti: manovrando opportunamente la valvola del cilindro d'aria compressa, si manteneva la temperatura esattamente al punto di ebollizione dell'acido cloridrico liquido, cosa che si controllava per mezzo del livello assunto dall'acido solforico nel tubo che pescava nella boccia di lavaggio (c), la cui capacità comunicava con l'atmosfera. Difatti se il livello dell'interno di questo tubo coincideva con quello della boccia, la pressione del gas acido cloridrico che riempiva tutto l'apparecchio era uguale a quella esterna. Se la temperatura della cellula fosse stata inferiore a quella di ebollizione dell'acido cloridrico liquido a pressione atmosferica, il gas non liquefatto, condensandosi, avrebbe dovuto provocare una diminuzione di pressione accusata dal livello dell'acido solforico. Un cambiamento di livello in senso opposto sarebbe stato indizio di una temperatura nella cellula superiore a quella di ebollizione. La coincidenza del menisco interno coll'esterno ci era quindi garanzia per il mantenimento di una temperatura costante ed uguale a quella di equilibrio fra lo stato liquido ed il gassoso.

Dopo raggiunta la costanza di temperatura, si connettevano con gli elettrodi delle cellule gli estremi del ponte e si procedeva alla misura. Poi, determinata la resistenza della cellula (A), si passava a raffreddare col solito metodo la cellula (B) contenente la sostanza, il cui comportamento si voleva studiare, sopprimendo in pari tempo il raffreddamento della cellula (A): allora il liquido contenuto in quest'ultima entrava in ebollizione e, distillando, andava a raccogliersi nella cellula (B). Dopo aver raccolto in questa una

quantità sufficiente di liquido, si procedeva alla misura della resistenza di esso come si era fatto per (A).

La « capacità » C della cellula, ossia quel numero, che, diviso per il valore trovato per la resistenza di una soluzione qualsiasi, misurata nella stessa cellula, fornisce la conducibilità specifica di questa soluzione, fu determinata prima d'ogni esperienza impiegando una soluzione N/50 di cloruro di potassio purissimo, preparata con acqua ridistillata su permanganato di potassio e su barite: il valore della conducibilità specifica di questa soluzione per le diverse temperature, fu prelevato dalla tabella fornita da Ostwald-Luther (loc. cit.). Per evitare che una modificazione della posizione reciproca degli elettrodi potesse, dopo determinato C, provocare un mutamento nel valore di questo fattore, si immobilizzava l'elettrodo superiore col fissare con un po' di « glu marin » la smerigliatura all'imbocco del tubo (3). Dopo compiuta l'operazione della determinazione di C, eliminammo completamente la soluzione di cloruro di potassio col far passare nella cellula una corrente di acqua distillata la cui azione fu protratta a lungo. Terminammo il lavaggio facendo ancora passare un po' d'acqua ridistillata su permangato di potassio e su barite; poi procedemmo all'asciugamento dell'apparecchio stesso, come già dicemmo.

Per controllare la purezza dell'acido cloridrico liquido di cui misuravamo la resistenza, procedemmo a questa determinazione una prima volta sulla cellula (A): poi, dopo avvenuta la distillazione, nella cellula (B), la quale per l'occasione non conteneva altra sostanza.

A causa della bassissima temperatura di ebollizione, le eventuali impurezze (acqua, ossicloruro di fosforo) dovevano restare indietro nella cellula (A); dato il caso che queste impurezze esistessero e che, esistendo, avessero una influenza sulla conducibilità specifica, il valore di questa, ottenuto nella cellula (B), avrebbe dovuto differire da quello ottenuto dalla cellula (A): come vedremo però le differenze da noi rilevate possono considerarsi come trascurabili, assicurandoci così della perfetta purezza dell'acido cloridrico impiegato.

Misure.

1ª. Cellula (A) $R = 3,448,275$
$C = 0,0,7878654$
$C/R = 0,200.10^{-6}$

2ª. Cellula (B) $R = 1,052.631$
$C = 0,17696210$
$C/R = 0,168.\ 10^{-6}$

3ª. Cellula (A) $R = 4{,}166{,}666$
$C = 0{,}7878654$
$C/R = 0{,}188.10^{-6}$

4ª. Cellula (B) $R = 1{,}053{,}740$
$C = 0{,}17696210$
$C/R = 0{,}167.10^{-6}$.

Dalla concordanza di queste cifre si può desumere che:

1°. Non esiste notevole differenza di purezza fra l'acido cloridrico liquido della cellula (A) e quello purificato per distillazione della cellula (B).

2°. Prendendo il valore minimo ottenuto dalle misure della cellula (B), l'acido cloridrico liquido alla sua temperatura di ebollizione a pressione ordinara ha un potere conduttore specifico espresso da $0{,}167.10^{-6}$.

Comportamento di alcuni cloruri in acido cloridrico liquido. — Allo scopo di evitare la possibilità di reazioni secondarie tra l'acido cloridrico liquido e la sostanza da sciogliere in esso, limitammo per ora le nostre ricerche allo studio dei cloruri. Il sale da studiare, perfettamente disseccato, veniva introdotto nella cellula (B) dalla tubulatura laterale di cui questa era munita: di poi facevamo avvenire nella cellula stessa la liquefazione di una certa quantità di acido cloridrico la cui conducibilità era già stata determinata nella cellula (A). Trovammo così che i cloruri di potassio, litio, ammonio, rame (ramoso e ramico), piombo, platino, oro, antimonio, erano perfettamente insolubili e che la loro presenza non modificava la conducibilità del liquido: il solo tetracloruro di stagno si sciolse, ma la soluzione così ottenenuta non mostrò una conducibilità differente da quella del solvente puro.

In presenza di questi inattesi risultati, ci sembrò assai interessante di studiare il comportamento dell'acqua. Mediante un piccolo cucchiaio di vetro fortemente raffreddato, s'introdusse un frammento d'acqua solidificata con aria liquida nella cellula (B) contenente l'acido cloridrico liquido la cui conducibilità era stata determinata. *Il frammento galleggiò inalterato alla superficie del liquido*: questo stato di cose perdura per quanto tempo si voglia, anche se, facendo risalire la temperatura, l'acido cloridrico entra in ebollizione, senza che la conducibilità di esso venga a differire dalla normale.

Conclusioni — 1. L'acido cloridrico liquido alla sua temperatura di ebollizione a pressione ordinaria ha un potere conduttivo specifico $0{,}167.10^{-6}$, assai simile a quello ottenuto da Kohlrausch per l'acqua purissima.

2. L'acido cloridrico liquido, dei cloruri da noi esaminati disciolse il solo cloruro stannico: questa soluzione non presentando una conducibilità differente da quella dell'acido cloridrico stesso, si può concludere che nelle

condizioni di esperienza l'acido cloridrico liquido non sia capace di provocare la dissociazione ionica di quel composto.

Lo strano comportamento dell'acqua, tanto differente da quello a temperatura ordinaria, lascia adito alla supposizione che siano le condizioni termiche speciali dell'esperienza quelle che provocano i fatti osservati. Intendiamo perciò continuare le nostre ricerche, impiegando l'acido cloridrico a temperatura ordinaria, mantenuto liquido sotto pressione.

Cristallografia. — *Sopra la forma cristallina di alcune sostanze otticamente attive e particolarmente di un racemo parziale ed attivo.* Nota di Federico Millosevich, presentata dal Socio G. Strüwer.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Su alcuni notevoli cristalli di celestite di Boratella (Romagna).* Nota di Ferruccio Zambonini, presentata dal Socio G. Strüver.

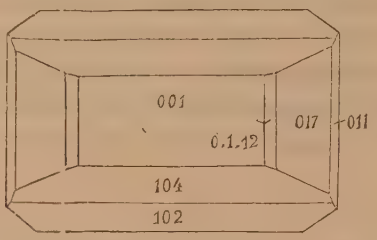
La celestite di Romagna è stata studiata varie volte da A. Schmidt e più recentemente dal prof. Artini. Il primo ha osservato le seguenti forme semplici: }001{, }110{, }120{, }2.0.11{, }104{, }207{, }102{, }011{, }0.1.12{, }111{, }112{, }113{, }121{, }122{, }142{, }277{, }324{. L'Artini nei cristalli del Museo Mineralogico dell'Università di Bologna ha determinato le forme seguenti: }001{, }110{, }450{?, }230{, }120{, }087{?, }011{, }0.1.12{, }102{, }207{, }104{, }105{, }111{, }113{, }122{, }124{, }324{, }326{, }562{, }214{.

La scorsa estate l'Ispettore delle Miniere Mazzuoli ha regalato all'Ufficio Geologico due bellissimi campioni di celestite delle miniere di zolfo di Boratella, in Romagna. Per cortese intercessione dell'ing. Viola ho potuto studiarli, e mi permetto di rivolgere anche qui ai due gentili ingegneri i miei ringraziamenti.

In uno dei due campioni i cristalli si presentano sotto forma di tavolette, per il forte predominio della base }001{: sono poi limitati dalle forme }110{, }011{, }104{ e }102{.

Ma molto interessanti sono i cristalli dell'altro campione, che offrono tutti la stessa combinazione, nuova per la celestina ed affatto caratteristica. Anche essi sono tabulari secondo la base: ora hanno l'aspetto di tavolette rettangolari, essendo allungati secondo l'asse y, ora invece di tavolette quadrate per l'uguale sviluppo nelle due direzioni x ed y. Tutti presentano la

combinazione }001{, }110{, {0.1.12{, }017{*, }011{, }104{, }102{. La forma }017{ è nuova per la celestina.



Come mostra la figura, il brachidoma }017{ è la forma più sviluppata dopo la base: }0.1.12{ è, invece, piuttosto sottile e dà misure abbastanza oscillanti. Sempre piccolissima è }011{. Nella zona [010] il macrodoma }104{ è spesso più grande di }102{. Il prisma }110{ è sempre molto piccolo.

Tutte le facce sono sempre poco piane e striate: i macrodomi lo sono parallelamente a *y*, i brachidomi a *x*.

Sono molto rari quei cristalli che permettono delle misure abbastanza precise: con esse si poterono determinare esattamente i simboli di tutte le forme. Nella seguente tabella sono riuniti gli angoli misurati in un bel cristallino, ed i calcolati partendo dalle costanti di Artini:

$$a : b : c = 0{,}781282 : 1 : 1{,}283328$$

	Angoli misurati	Calcolati
(011) : (01$\bar{1}$)	75° 59′	75° 51′ 11″
(001) : (011)	52 10	52 4 24
(001) : (017)	10 33	10 23 20
(011) : (017)	41 37	41 41 4
(011) : (0.1.12)	45 49	45 58 9

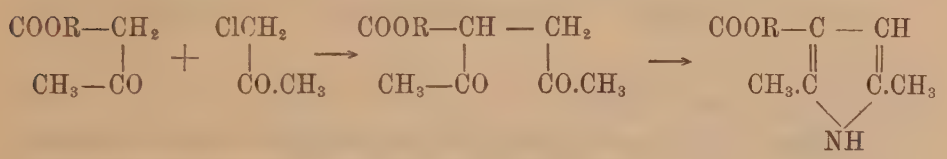
Parassitologia. — *Ricerche intorno a due specie di flagellati parassiti.* Nota della dottoressa Anna Foà, presentata dal Socio B. Grassi.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

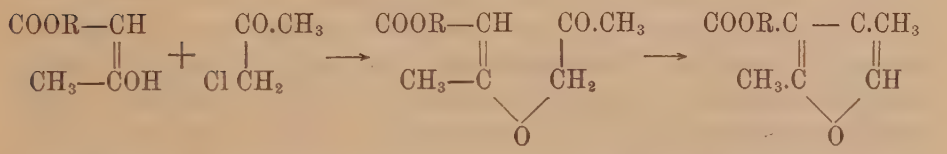
Chimica. — *Sintesi di corpi furanici dalla cloroacetaldeide* (1) Nota di G. Plancher e S. Albini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Tra i metodi sintetici per ottenere corpi furanici e pirrolici, è notevole il metodo di Hantzsch (2), che consiste nell'azione del cloroacetone sull'etere acetacetico in presenza di ammoniaca. Questa reazione dà luogo, come è noto, all'etere dell'acido 2.5-dimetilpirrol-carbonico ed all'etere dell'acido 2.4-dimetil-furandicarbonico (3). Ciò mostra, secondo Feist, che in questa reazione il cloroacetone, per formare il pirrolderivato, reagisce col gruppo metilenico dell'etere acetacetico in modo da dar luogo ad un γ-dichetone (I), e per formare il derivato furanico, invece, reagisce colla forma enolica dell'etere acetacetico, in modo da dar luogo ad un composto intermediario derivato acetonico di detta forma (II).

I.



II.



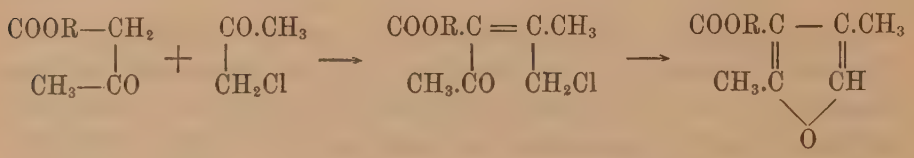
Anche la reazione tra il cloroacetone e l'etere acetondicarbonico e ammoniaca dà un furanderivato ed un pirrolderivato in modo perfettamente analogo, quantunque in rapporti quantitativamente inversi: l'etere 2-metilpirrol-4-carbon-5-acetico e l'etere 3-metilfuran-4-carbon-5-acetico (4). Il che varrebbe appunto a stabilire, che la formazione di derivato furanico o pirrolico dipende dai due modi diversi di agire del cloroacetone.

Il desiderio di conoscere di che natura siano realmente i composti intermediarî di questa reazione, unito a quello di portare un contributo ai me-

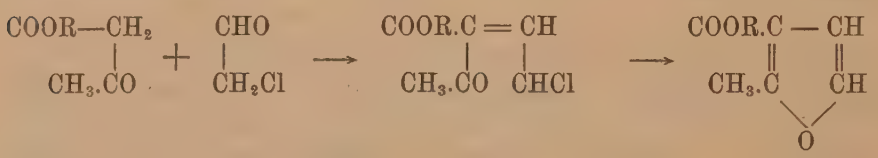
(1) Lavoro eseguito nel laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.
(2) Hantzsch, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. XXIII. 1474.
(3) F. Feist, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. XXXV. 1537.
(4) F. Feist. W. Moltz. Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. XXXII, 1766.

todi sintetici di una serie di corpi, come i pirrolici ed i furanici, sempre più importante, è il movente di questa ricerca.

Supponemmo che la reazione tra il cloroacetone e l'etere acetacetico con ammoniaca, nel caso di formazione di composto furanico, dovesse formularsi così:



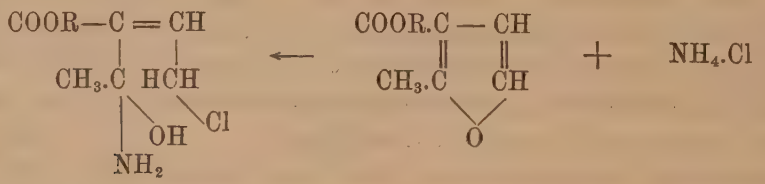
Se tale supposizione era giusta, preparando l'etere cloroetilidenacetacetico (dalla cloroaldeide e dall'etere acetacetico), che corrisponde perfettamente nella serie aldeidica al sopradetto prodotto intermediario ipotetico, e trattandolo con ammoniaca alcoolica, dovevamo ottenere appunto l'etere dell'acido 2-metilfuran-3-carbonico:



Ciò abbiamo, infatti, constatato.

Nell'azione dell'ammoniaca sull'etere cloroetilidenacetacetico si formano solo piccolissime traccie di composti pirrolici; e ciò che è più convincente è il fatto, che se si fa agire l'ammoniaca alcoolica sopra una miscela dell'idrato della cloroaldeide e di etere acetacetico, non si forma il composto furanico in questione; il che sta a dimostrare che perchè la reazione avvenga, deve potersi formare il cloroetilidenderivato, ciò che in queste ultime condizioni non avviene.

In quanto al passaggio dal cloroetilidenderivato a quello furanico, la reazione deve intendersi così:



Per ciò che riguarda lo spostamento del doppio legame, esso deve apparire naturale, quando si pensi a questo.

Un sistema atomico:

$$\underset{1}{-}CH=\underset{2}{CH}-\underset{3}{CH}=\underset{4}{CH}-$$

per addizione di due atomi o gruppi monovalenti passa al sistema:

$$\underset{1}{-CHR'-}\underset{2}{CH=}\underset{3}{CH-}\underset{4}{CHR'-}$$

e non già a quello

$$\underset{1}{-CHR'-}\underset{2}{CHR'-}\underset{3}{CH=}\underset{4}{CH-}$$

Inversamente deve avvenire che un sistema

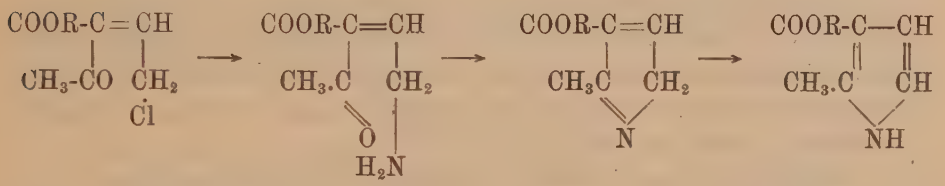
$$\underset{1}{-CHR'-}\underset{2}{CH=}\underset{3}{CH-}\underset{4}{CHR'-}$$

per sottrazione di due atomi o gruppi monovalenti dai carbonî 1 e 4 passi al sistema:

$$\underset{1}{-CH=}\underset{2}{CH-}\underset{3}{CH=}\underset{4}{CH-};$$

come fa nel nostro caso.

Un corpo pirrolico potrebbe formarsi anche in questa reazione così:



Ma la sostituzione del cloro col gruppo amminico, ad esempio nel cloroacetale avviene con difficoltà e nel bromoacetale quasi affatto. Ciò avverrà anche per altri derivati della cloroaldeide; epperciò la reazione che fa capo al derivato furanico prevale in modo assoluto su quella del derivato pirrolico.

Invece di adoperare la cloroacetaldeide, ci siamo serviti del prodotto greggio, dell'azione dell'acido ossalico anidro sul cloroacetale, che consta dell'idrato $C_2H_3ClO + {}^1/_2H_2O$ (1).

L'acido cloroetilidenacetacetico si ottiene, come il suo corrispondente non clorurato (2), saturando a freddo con acido cloridrico una miscela equimolecolare di idrato di cloroacetaldeide ed etere acetacetico, e lasciandola stare a bassissima temperatura per 24 ore. La sostanza, diluita in seguito, versandola su ghiaccio pesto, a poco a poco abbandona un olio giallo, che si

(1) Natteres, Monatshefte f. Chem. III, 448.

(2) Claisen e Matthews, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. XXXI, 735. — Ann.d. Chem. 218, 172.

lava con acqua e con soluzione diluita di carbonato sodico in imbuto a robinetto, e si secca con cloruro di calcio fuso.

Si presenta così come un liquido di colore leggermente gialliccio, che trattiene con tenacità piccole quantità di acido cloridrico.

È stato sottoposto a distillazione frazionata a 19-20 mm. di pressione.

Si decompone in parte e finora non siamo riusciti ad averlo puro.

Abbiamo impiegato un prodotto che distillava fra 105°-130°, però per la massima parte passava verso 120° a 19-20 mm., senza ulteriore purificazione.

L'etere cloroetilidenacetacetico fu chiuso in tubi con dieci volte il suo volume di ammoniaca alcoolica satura a 0°. Nella miscela si ebbe tosto riscaldamento, colorazione rossa e separazione di un precipitato bianco cristallino di cloruro ammonico.

Fu riscaldato per 4 ore a 150° in tubo chiuso. Il contenuto rosso-bruno dei tubi, in cui si trovava un abbondante precipitato cristallino prevalentemente di cloruro ammonico, si lavò con alcool assoluto. L'alcool fu unito al primo filtrato.

Sottoposto il filtrato a distillazione, lasciò un residuo oleoso brunastro, di odore particolare, che dava col fuscello d'abete la colorazione rossa (reazione dei pirroli).

Da esso si asportò la parte neutra trattandolo con un poco di acqua ed estraendo con etere. La parte eterea fu seccata su carbonato potassico. Il liquido di lavaggio, acidificato, non diede alcun prodotto ricercabile. Il residuo etereo non cristallizzava, e fu perciò sottoposto a saponificazione bollendolo con potassa alcoolica al 10 %.

Ad operazione finita si ebbe nella miscela un precipitato bruno.

Distillato l'alcool, si sciolse il residuo in poca acqua e fu sbattuto con etere, per togliere le impurità e la parte non salificata.

La soluzione acquosa, liberata dall'etere con una corrente di anidride carbonica e filtrata dalle resine brune separatesi, fu precipitata con acido solforico diluito e il precipitato ridisciolto con carbonato sodico.

Riprecipitato frazionatamente con acido solforico diluito, diede nelle prime porzioni un precipitato bruniccio, e in seguito appena colorato in giallo sporco. Fu separato per filtrazione.

L'etere estrasse dal filtrato ulteriori quantità di acido meno puro.

L'acido precipitato era solubile discretamente in acqua fredda e più nell'acqua calda; solubile in alcool, etere, etere di petrolio ed acido acetico.

Ricristallizzato dall'acqua, si ebbe quasi bianco; fonde a 102°-103°.

Non dà più la reazione del fuscello d'abete. La ricerca dell'azoto diede risultati negativi.

Presenta una colorazione verde (reazione dell'indofenina) coll'isatina solforica, come compete ad un derivato furanico.

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_6H_6O_3$
	I.	II.	
C	57,36	57,47	C 57,14
H	5,01	4,98	H 4,80

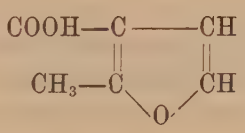
La determinazione del peso molecolare:

	concentr.	abbass.	peso molecolare trovato	peso molecolare calcolato per $C_6H_6O_3$
I.	0,689	0°,23	117	126
II.	0,152	0°,50	119	

Ne fu fatto il sale d'argento che diede all'analisi i seguenti numeri:
In 100 parti:

trovato	calcolato per $C_6H_6O_3$
46,28	46,35

Tutto quindi ci porta a credere, che nell'azione dell'ammoniaca sull'etere cloroetilidenacetacetico si sia formato l'etere metilfurancarbonico, da cui per saponificazione con potassa potemmo avere l'acido in parola, a cui perciò dovremo attribuire la formola:



di acido silvancarbonico.

Esso è il secondo acido metilfurancarbonico conosciuto, poichè è già noto l'acido α-metilfuran-α'carbonico (1).

Scaldato da solo distilla in parte e si condensa nelle pareti fredde del tubo.

Una piccola porzione scaldata con carbonato potassico secco, dà dei vapori che si condensano sulle pareti del tubetto solo in parte e che dovrebbero essere di silvano o α-metilfurano che bolle a 65° (2).

Lo studio viene proseguito in questo laboratorio nel senso di definire meglio questa reazione ed i suoi prodotti, e di generalizzarla estendendola ad altri corpi oltre l'etere acetacetico.

(1) Hill, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. XXII, 608.

(2) Atterberg, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. XIII, 879; Harries, Ber. d. deutsch. Chem. Gesell. XXXI, 38.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Cerruti presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Corrispondenti Delpino, Pascal, e del Socio straniero Koelliker: richiama inoltre l'attenzione della Classe su di una pubblicazione fatta dai dottori G. d'Achiardi, Manasse e Aloisi, dedicata alla memoria di Antonio d'Achiardi, e sui lavori dei signori Lebon e Jaegermann.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente Blaserna informa la Classe che alla seduta assistono i Soci stranieri Mittag-Leffler e Mond.

Lo stesso Vicepresidente comunica i ringraziamenti del prof. Angelo Angeli per la sua recente elezione a Corrispondente.

Il Socio Foà legge la seguente Commemorazione del Socio nazionale Angelo Maffucci.

La nostra Accademia ebbe la sventura di perdere, poco dopo che l'aveva nominato Socio nazionale, il prof. Angelo Maffucci, mancato a Pisa il 24 novembre 1903. Era nato in provincia d'Avellino a Calitri il 17 ottobre 1847 da una buona famiglia di agricoltori, che l'avrebbe voluto fare esso pure, o un agricoltore, o un prete; ma egli dotato di uno spirito energico d'indipendenza, volle seguire l'inclinazione sua per gli studî superiori, sebbene sapesse a quali disagi egli sarebbe andato incontro, e quali sofferenze lo attendessero, onde si ridusse all'Università di Napoli. L'ebbero caro fra gli allievi il Tommasi e l'Amabile, ma dopo la laurea fu costretto a riparare in una condotta nel suo paese natale. Di là si recò a Napoli nel 1873 ove guadagnò una medaglia di benemerenza per la campagna colerica che aveva coraggiosamente fatto. È di questa epoca uno studio sull'azione dell'acido fenico nella pustola maligna, il quale è tutt'ora raccomandabilissimo alla pratica medica. Poco dopo divenne coadiutore dell'Istituto di Anatomia Patologica diretto dal professore v. Schrön, e da questa epoca cominciò la vita scientifica di Maffucci. Nel 1880 vinceva un concorso alla cattedra di patologia generale di Messina, ma preferì di rimanere a Napoli come Chirurgo all'ospedale degli Incurabili, ove poteva lavorare e guadagnarvi un sostentamento sufficiente, mentre a Messina mancava a quei tempi ogni traccia d'Istituto.

Due anni dopo, cioè nel 1882, accettò la cattedra di Anatomia Patologica di Catania, e nel 1884 per concorso fu nominato ordinario a Pisa, ove si fermò sino alla morte pur troppo prematura. In quella Università ebbe i primi anni ad agitarsi per la conquista dei mezzi necessarî e dell'autonomia del suo Istituto, e conseguì interamente l'intento così che egli potè dedicarsi per molti anni ad un lavoro pertinace, individuale, autonomo, che gli ha reso i migliori risultati.

Nelle opere antecedenti il Maffucci aveva dimostrato di sapersi impegnare nella ricerca intesa alla soluzione dei problemi fisiopatologici del suo tempo, e lo provano i suoi studî sull'assorbimento del Peritoneo, sulla patologia del fegato, sul linfoma maligno che in alcuni casi egli giudicò d'origine infettiva, sui tumori d'origine blastomicetica, sulla patologia della coda equina, e moltissime altre contribuzioni particolari. Più tardi il complesso dei lavori ai quali il Maffucci attese con vittoriosa pertinacia e che gli legarono il nome alla storia della letteratura medica contemporanea, fu quello che dal 1887 ha proseguito fino a questi ultimi giorni della sua vita, e che è riassunto nell'importante Memoria pubblicata da questa Accademia nel 1902, intitolata: *Patologia embrionale infettiva. — Intorno alla fisiopatologia dell'embrione di pollo.* Il Maffucci aveva già fatto per il primo la scoperta che il bacillo della tubercolosi aviaria per la sua morfologia, per le sue proprietà colturali, e per i caratteri biologici, è diverso dal bacillo della tubercolosi dei mammiferi, e delle sue giuste osservazioni hanno fatto tesoro anche molti ricercatori stranieri. Più tardi, il Maffucci volle applicare allo studio della tubercolosi il metodo di ricerca che aveva già impiegato per altre infezioni, e precisamente per il carbonchio, per il colera dei polli e per il barbone, cioè quello della diretta infezione delle uova fecondate onde rilevare come si diportava l'embrione di fronte al virus.

E qui giova che io riproduca quasi letteralmente alcuni periodi di una lettera che pochi mesi or sono scriveva il povero Maffucci ad un amico suo, e nella quale accenna all'idea che egli ebbe primo di infettare gli embrioni. « Era dominante nella scienza l'idea che la placenta fosse un filtro impermeabile per i microbii, sebbene talora si trovassero dei rari germi nei tessuti fetali, mentre abbondantissimi erano nel sangue materno. D'altra parte avevo letto il libro di Preyer sulla fisiologia embrionale, e restai colpito dalla grande diversità di potere funzionale e nutritivo dell'embrione in confronto di quello dell'adulto. Da questi fatti mi nacque l'idea che l'embrione dovesse reagire diversamente dagli adulti all'infezione, e volli provarlo coll'esperimento. Mi era necessario scegliere un embrione che non fosse legato alla madre infetta, onde potere valutare nella loro interezza i poteri dell'embrione di fronte ai processi infettivi, epperò scelsi l'embrione del pollo ». Dalle sue ricerche ebbe primo il risultato che il veleno della tubercolosi fosse un prodotto del protoplasma del bacillo stesso, e non già che

esso fosse dovuto alla decomposizione esercitata dal bacillo sopra i mezzi nutrizi. Il Maffucci aveva osservato che il bacillo disfacendosi nei tessuti dell'embrione gli procurava la cachessia e la morte, e con esperienze straordinariamente numerose dimostrò che all'embrione passa più facilmente il veleno che non il germe tubercolare, e che la femmina può essere intossicata dal maschio il cui seme contenga bacilli della tubercolosi. Il Maffucci dimostrò inoltre che l'embrione ha il potere di distruggere il B. tubercolare, mentre l'adulto ne è recettivo, ed osservò che in diretto rapporto colla intossicazione si producevano degli aborti, delle distrofie o dei prodotti teratologici nella patologia umana. Il Maffucci studiò come il bacillo venga distrutto nei tessuti dell'embrione, ed osservò che questo ultimo tuttavia risente della diffusione delle sostanze bacillari, e cade in marasma.

Dopo essersi così estesamente occupato dalla fisiopatologia della tubercolosi era naturale che il Maffucci si occupasse anche delle questioni che riguardano la cura razionale del processo, e ciò fece col Di-Vestea sottoponendo a controllo sperimentale il principio della siero sterapia. I risultati furono negativi quanto al principio stesso, ma furono nonostante importantissimi perchè gli esperimenti furono condotti con molta coscienza, e le conclusioni furono oneste e legittime. In questi ultimi tempi il Maffucci si occupava della questione sollevata da Koch circa l'identità dei bacilli della tubercolosi dell'uomo e dei mammiferi. Confermò la refrattarietà dei bovini alla tubercolosi umana, la quale produce in essi solo delle forme attenuate e transitorie, e ottenne la refrattarietà del bove verso la tisi perlacea, dopo un progressivo trattamento preventivo con grandi masse di bacillo virulento umano.

Il Maffucci concludeva anche in base alle proprie esperienze che la tubercolosi umana rappresenta una forma attenuata della tubercolosi bovina. La morte ha fatalmente interrotta l'attività grande di quest'uomo che nella prima padronanza dell'argomento e nella più scrupolosa coscienziosità del suo lavoro scientifico, avrebbe potuto recare ancora molto vantaggio alla scienza.

Il Maffucci vide riconosciuto il suo valore da varie Accademie italiane. L'Istituto Veneto gli ha assegnato il premio Balbi-Valier per il progresso delle scienze mediche; la Società dei Quaranta gli assegnava la gran medaglia d'oro: l'Accademia medica di Napoli, e la R. Accademia dei Lincei lo avevano eletto Socio nazionale. Il Maffucci fu medico primario dell'Ospedale di Pisa, ove ha fondato un gabinetto isto-chimico per la educazione dei giovani medici; fu uomo di soda coltura medica, circoscritto alla sua propria ricerca scientifica, così che di null'altra cosa sembrava interessarsi cogli altri che dei suoi proprî studî. Anche morendo volle beneficare la gioventù istituendo una borsa di studio per l'Anatomia Patologica nell'Università di Pisa. Non perfettamente sano, sembrava ricevere dagli organi suoi delle incoscienti sen-

sazioni penose, le quali ne mantenevano piuttosto difficile il temperamento; ma egli fu sempre onesto, e la sincera e disinteressata passione per il suo ideale scientifico lo rese sempre e a tutti altamente rispettabile, come oggi tutti noi dal profondo del cuore ne compiangiamo la perdita. Pace alla sua memoria!

CORRISPONDENZA

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

Le R.R. Accademie delle scienze di Amsterdam e di Stockholm; la R. Accademia di scienze e lettere di Copenaghen; la Società geologica di Tokyo; il Museo di storia naturale di Amburgo; l'Osservatorio di S. Fernando.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 gennaio 1904.

Alla memoria di Antonio D'Achiardi, professore di Mineralogia nell'Università di Pisa. — Lavori eseguiti nell'Istituto di Mineralogia dell'Università di Pisa. Pisa, 1903. 8°.

Amodeo F. — Nicolò Fergola. Memoria letta all'Accademia Pontaniana nella tornata del 5 luglio 1903. Napoli, 1903. 8°.

Belloch (Observatorio). — Hojas meteorológicas. 41°37′12″ Lat. N. — 2°26″17″ E. Greenwich. Llinàs (Barcelona) España. Año 190.... Mes de.... in fol. obl.

Clerici E. — Resoconto sommario delle escursioni fatte nei dintorni di Siena ed al Monte Amiata nel 1903. Roma, 1903. 8°.

Curinier C. E. — Notice biologique et bibliographique su M. Ernest Lebon. Paris, 1902. 8°.

Delpino F. — Domenico Cirillo e le sue opere botaniche. Napoli, 1902. 8°.

Gibbs J.-W. — Diagrammes et surfaces thermodinamiques. Paris, s. a. 8°.

Herdmann W. A. — Report to the Government of Ceylon on the Pearl Oyster Fisheries of the Gulf of Manaar; with supplementary reports upon the marine Biology of Ceylon by other Naturalists (published... by the R. Society). London, 1903. 4°.

Jaegermann R. — Prof. Dr. Th. Bredichin's Mechanische Untersuchungen über Cometenformen: in systematischer Darstellung. S^{t}. Petersburg, 1903. 8°.

Kölliker A. — Die Entwickelung und Bedeutung des Glaskörpers. Leipzig, 1904. 8°.

Lebon E. — Histoire abrégée de l'Astronomie. Paris, 1899. 8°.

Id. — Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire moderne, conforme au programme du 15 juin 1891. Second volume. Classe de première moderne (Sciences). Quatrième édition. Paris, s. a. 8°.

Id. — Traité descriptifs de géométrie cotée. Premier volume à l'usage de la Classe de Mathématiques élémentaires (Troisième édition). Paris, s. a. 8°.

Id. — Géométrie appliquée, rédigée conformément au programme des Écoles normales primaires et du Brevet supérieur, comprenant des Notions de Trigonométrie rectiligne, le Levé des Plans, l'Arpentage, le Nivellement, les Plans cotés et les Surfaces topographiques. Paris, s. a. 8°.

Id. — Éléments de Perspective, comprenant la Perspective conique linéaire, la Perspective cavalière et les Ombres en perspective. Paris, s. a. 8°.

Id. — Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire moderne. Premier volume. Classe de seconde. Paris, s. a. 8°.

Id. — Sulla identità di due metodi elementari pel calcolo di π. Parigi, 1901. 8°.

Id. — Géométrie descriptive et Géométrie cotée, conforme aux Programmes du 31 mai 1902, pour l'enseignement secondaire. Paris, s. a. 8°.

Id. — Note sur l'intégration des équations différentielles de la forme

$$F(p, px - y) = 0.$$

Paris, 1883. 8°.

Id. — Théorie et application des sections homothétiques de deux quadrigues. Paris, 1884. 8°.

Id. — Notice sus les Travaux mathématiques de M. Ernest Lebon. Paris, 1900. 8°.

Id. — Sur les démonstrations de quelques propriétés métriques du triangle. s. l., 1879. 8°.

Id. — Recueil des épures de Géométrie descriptive proposées depuis 1862 pour l'admission à l'École de Saint-Cyr. Paris, 1882. 8°.

Id. — Note sur l'intersection d'une droite et d'une quadrigue de révolution. Paris, 1882. 8°.

Id. — Sur la division d'une cercle en deux parties équivalentes et sur le volume du segment de sphère. Paris, 1895. 8°.

Id. — Nouvelle construction de la normale menée à une conique à centre d'un point de l'un de ses axes. Paris, 1881. 8°.

Id. — Solution du Problème de Malfatti. Palermo, 1889. 8°.

Id. — Mémoire sur l'épaisseur des berceaux horizontaux. Paris, s. a. 8°.

Id. — Sur une propriété de la strophoïde oblique. Paris, 1895. 8°.

Id. — Sur les surfaces admettant les plans de symétrie du tétraèdre régulier et du cube. Paris, 1889. 8°.

Id. — Sur le calcul de quelques intégrales. Paris, 1888. 8°.

Lebon E. — Sur l'arête de rebroussement d'une développable. Paris, s. a. 8°.

Id. — Sulla determinazione degli ombelichi delle superficie tetraedriche. Palermo, 1890 8°.

Id. — Problèmes de mathématiques pour le baccalauréat (Enseignement classique et enseignement moderne). Paris, 1898. 8°.

Id. — Géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire moderne, conforme au programme du 15 juin 1891. 5ème édition. Premier volume. Classe de seconde. Paris, s. a. 8°.

Id. — Traité de géométrie descriptive pour l'enseignement secondaire classique. Second volume à l'usage des Classes de mathématiques speciales. Texte et Atlas. Paris, s. a. 8°.

Lupša F. — Die Nordpolsphinx oder Frage der modernen Nordpolar-Forschung. Laibach, 1903.

Linsbaner K. e L.; Portheim L. R. v. — Wiesner und seiner Schule. Ein Beitrag zur Geschichte der Botanik. Mit einem Vorworte von Prof. Dr. *Hans Molisch* Wien, 1903. 8°.

Pascal E. — Sulle forme differenziali omogenee di ordine superiore. Milano, 1903. 8°.

Porro F. — Observationes circa Fixas. Schizzi di Carte Celesti delineati da Francesco Bianchini sopra osservazioni proprie e di Geminiano Montanari, pubblicate con introduzione e con note. Genova, 1902. 4°.

Ricerche eseguite nel Laboratorio di chimica agraria della R. Scuola Superiore d'agricoltura di Milano. Analisi eseguite per il Pubblico negli anni 1898-1902. Milano, 1903. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLE UNIVERSITÀ DI BERNA E DI BASILEA.

I. — BERN.

Albrecht O. — Zur ältesten Geschichte des Kundes. München, 1903. 8°.

Amberg H. — Experimenteller Beitrag zur Frage der circulären Arteriennaht. Leipzig, 1903. 8°.

Baragiola W. J. — Ueber das Verhalten der normalen Natrium- und Kaliumsalze des Wolframs, Molybdäns und Vanadins gegen Ammoniumchlorid. Bern, 1902. 8°.

Beck C. — Ueber Befunde an Nieren mit gehemmter Entwichlung. Berlin, 1903. 8°.

Borissowa A. — Beiträge zur Kenntnis der Bantischen Krankheit und Splenomegalie. Berlin, 1903. 8°.

Burgener P. — Beiträge zur Kenntnis der Psoriasis. Berlin, 1903. 8°.

Carl S. — Zur Aetiologie des sogenannten Geburtsrauchbrandes. Berlin, 1903. 8°.

Cornelius H. — Untersuchungen über die therapeutischen und toxicologischen Wirkungen der Septoforma. München, 1903. 8°.

Cremer J. — Studien über Elemi. Aachen, 1902. 8°.

Dankmeyer H. — Sudien und Beobachtungen über Bronchitis und Dämpfigkeit des Pferdes. Leipzig, s. a. 8°.

Decker O. — Ueber Ammoniumarsenvanadinmolybdate. Bern, 1902. 8°.

Deschwanden G. v. — Klinische Beiträge der Aether-Narcose. Sarnen, 1902. 8°.

Dorssen J. v. — Ueber die Genese der Melanome in der Haut bei Schimmelpferden. Amsterdam, 1903. 8°.

Dude M. — Ueber den Einfluss des Sauerstoffentzuges auf pflanzliche Organismen. München, 1903. 8°.

Dutoit A. A. — Ein Fall von pseudoleukamischen Lymphomen der Augenlider mit generalisirter Lymphombildung. Wiesbaden, 1903. 8°.

Elsässer A. — Beiträge zur Kenntniss des Tetanus traumaticus. Leipzig, 1903. 8°.

Engelmann. — Ueber das Vorkommen von Fett im kryptorchidischen u. normalen Hoden. Darmstadt, 1902. 8°.

Ephros J. — Studien in der Flavongruppe. Bern, 1901. 8°.

Ernst W. — Ueber Nekrosen und den Nekrosebacillus (Streptothrix necrophora). Stuttgart, 1902. 8°.

Escher C. — Zur Frage der angeborenen Rachitis. Berlin, 1902. 8°.

Felix C. H. — Ueber Luftinsufflationen in die vordere Augenkammer, eine neue Methode zur Behandlung des Iris- und Corneatuberkulose. Bern, 1902. 8°.

Feser A. — Beobachtungen über vermeintliche Kainitvergiftungen bei Rehen und experimentelle Untersuchungen (Fütterungsversuche) über den Einfluss des Kainitz auf den tierischen Organismus. München, 1903. 8°.

Froehner R. — Die Stellung der Kreisthierärzte in Preussen in der Vergangenheit und Gegenwart. Hannover, 1902. 8°.

Froemsdorff G. — I. Ueber die Kondensationsfähigkeit cyclischer Ketone. II. Ueber Hydrazone cyclischer Ketone. III. Ueber das α-Naphtochromon. Würzburg, 1903. 8°.

Geissendörfer G. — Untersuchungen über Lysoform. Bern, 1903. 8°.

Geissler E. A. — Klinisch-experimentelle Untersuchungen über die Uebertragbarkeit der Masern auf kleiner Haustiere. Leipzig, 1903. 8°.

Gfeller L. — Beitrag zur Kenntniss der angeborenen Darmcysten. Leipzig, 1902. 8°.

Goldberg H. — Die Wirkung von anorganischen Substanzen auf Protisten. München. 1903. 8°.

Gutknecht A. — Integrallogarithmus. Bern, 1903. 8°.

Joris L. — De la Galactophorite traumatique et de la Mastite par métastase pyémique chez les animaux domestiques. Lyon, 1903. 8°.

Jung P. — Zur Kritik der Reifezeichen der Frucht. Strassburg, 1902. 8°.

Juzi O. — Ueber den Feuerbach'schen Kreis in variablen Dreiecken. Langenthal, 1903. 8°.

Haack K. — Vergleichende Untersuchungen über die Muskulatur der Gliedmassen und des Stammes bei der Katze, dem Hasen und Kaninchen. Dresden, s. a. 8.

Hannach O. — Synthese des 3-Oxy-β-Benzylchromons. Bern, 1903. 8°.

Hauger A. — Die Züchtung, Haltung und Nutzung des Rindes im Bezirk Pforzheim nach Lage der örtlichen und wirtschaftlichen Verhältnisse, die Folgen dieser Viehhaltung und diesbezügliche Verbesserungs-Vorschläge. Pforzheim, 1903. 8°.

Heinick E. — Beitrag zur Kenntniss der Bakterienflora der Schweinedarmes. Berlin, 1903. 8°.

Henneberger M. — Beiträge zur Theorie der Integrale der Bernoullischen Funktion. Bern, 1902. 8°.

Heurberger K. — Untersuchungen über den chinesischen Rhabarbar. Bern, 1902. 8°.

Hoffmann M. K. — Zur Analyse von niederen Molybdänoxydverbindungen und Beiträge zur Chemie der Salze derselben. Leipzig, 1903. 8°.

Humbert F. — Ueber die Erfolge der Gastro-Enterostomie bei 32 Fällen von benignen Magenaffektionen. Bex, 1902. 8°.

Jakob H. — Experimentelle Untersuchungen über die diuretische Wirkung des Theobrominum-Natrioaceticum (Agurin) und dessen praktische Verwertung in der Tiermedizin. München 1902. 8°

Jacoby W. — Unterschiede am Schädel des Schimpansen, Gorilla und Orang-Utan. Stuttgard, 1903. 8°.

Grand E. (*Le*). — Ueber die schwachsinnigen Kinder in der Schweiz. Bern, 1903. 8°.

Kerkhoven C. — Ueber Ammoniumoxalovanadinmolybdate. Bern, 1902, 8°.

Kirsten F. — Vergleichend-anatomische Untersuchung über die Ohrmuskulatur verschiedener Säugetiere. s. a. 8°.

Kronacher C. — Beiträge zur Kenntnis der Rhönziege. Bamberg, 1903. 8°.

Krüger E. — Die Bedeutung des Glossopharyngeus für die Innervation des Wiederkauaktes. München, 1902. 8°.

Kuhn E. — Ueber Schwielenbildung, chronischen Katarrh und traumatischen Verschluss der Zitze des Kuheuters. Berlin, 1903. 8°.

Kulka O. — Beiträge zur Kenntnis einiger Zirkoniumverbindungen. Bern, 1902. 8°.

Lampe V. — Zur Kenntnis des Brasilins. Zur Kenntnis des Rhamnetins. Bern, 1903. 8°.

Lempen J. — Torsio uteri gravidi. Berlin, 1902. 8°.

Lohoff C. — Odontogenes Neoplasma in den Kieferhöhlen eines Fferdes. Stuttgart, 1903. 8°.

Markus H. — Beitrag zur pathologischen Anatomie der Leben und der Niere bei den Haustieren. s. l. 1902. 8°.

Menkowski H. — Der histologische Bau des Strichkanals der Kuhzitze. Lemberg, 1903, 8°.

Mogilewa A. — Ueber die Wirkung einiger Kakteenalkaloide auf das Froschherz. Leipzig, 1903. 8°.

Morlot M. v. — Ueber den Geburtsverlauf der alten Erstgeschwängerten. Bern, 1903. 8°.

Nadler R. — Statistischer Beitrag zu dem Verlaufe der Mortalität an Diphterie, Keuchhusten, Scharlach und Masern in der Schweiz in den Jahren 1876-1900. Bern, 1903. 8°.

Paul L. — Synthesen einiger Chromonderivate. Bern, 1902. 8°.

Poliakoff S. — Die Erregbarkeit von Nerv und Muskel perfundierter Frösche. München, 1903, 8°.

Rab C. J. — Untersuchungen über die Muskulatur des trächtigen Rinderuterus. Utrecht, 1903. 8°.

Reichert F. — Die Bedeutung der sexuellen Psychopathie des Menschen für die Tierheilkunde. München, 1902. 8°.

Reiser E. — Vergleichende Untersuchungen über die Skelettmuskulatur von Hirsch, Reh, Schaft und Zeiege. Langensalza, s. a. 8°.

Remmelts H. — Untersuchungen betreffend Bacterium Coli Commune bei Saugetieren, Vögeln und Fischen. Vlaardingen, 1902. 8°.

Roth L. — Ueber die Melanosis renum beim Rinde. München, 1902. 8°.

Schmidt G. — Ueber den Harzbalsam von Pinus Laricio (Oesterreichischer Terpentin). Bern, 1903. 8°.

Ruijter de Wildt J. C. (*De*). — Synthese des 1, 3- Dioxychromons. Leiden, s. a. 8°.

Schenkl G. J. — Die fötale Riesenniere und ihre Beziehungen zur Entwicklung-Geschichte der Niere. Berlin, 1903. 8°.

Schimmelpfennig G. — Uber Ascaris megalocephala. Beiträge zur Biologie und physiologischen Chemie derselben. Berlin, 1902. 8°.

Schmitt F. — Ueber das postembryonale Wachstum des Schädels verschiedener Hunderassen. Berlin, 1903. 8°.

Schöndorff A. — Ueber den Farbenwechsel bei Forellen (Ein Beitrag zur Pigmentfrage). Bern, 1903. 8°.

Schwendimann F. — Untersuchungen über den Zustand der Augen bei scheuen Pferden. Berlin, 1903. 8°.

Simon N. — Ueber Darstellung und Zusammensetzung von Rauchopium sowie die im Opiumrauch wirksamen Stoffe. Würzburg, 1903. 8°.

Simon L. — Beiträge zur Anatomie und Entwickelung der Bradypodiden. Berlin, 1902. 8°.

Steiger K. v. — Beitrag zur Frage der Tragfähigkeit von Amputationsstümfen an der untern Extremität. Bern, 1903, 8°.

Steinhard O. — Ueber Placoidschuppen in der Mund- u. Rachen-Höhle der Plagiostomen. Berlin, 1902. 8°.

Stenzel W. — Ueber Angiome, Carcinome und Chondrome in der Milchdrüse der Hausthiere. Berlin, 1902, 8°.

Stroh G. — Beiträge zum Bau, Vorkommen und zur Histogenese der fleckigen Capillarektasie in der Leber der Wiederkäuer. Stuttgart, 1902. 8°.

Stuurman W. — Zur Identität der Menschen- und Rindertuberkulose. Leiden, 1903. 8°.

Thienel M. — Vergleichende Untersuchungen über den mikroskopischen Bau der Blutgefässe der Schultergliedmasse von Pferd, Esel, Rind, Schaf, Schwein und Hund. Langensalza, s. a. 8°.

Toggenburg F. — Ueber Phosphorvanadinmolybdate. Bern, 1902. 8°.

Vogel O. E. — Die Seuche unter den Agoni des Lago di Lugano. (Colibacillosis alosae fintae). Leipzig, 1903. 8°.

Walter T. — Ueber die Complicationen der Schwangerschaft, der Geburt und des Wochenbettes mit chronischen Herzklappenfehlern. Zürich, 1902. 8°.

Warringsholz C. H. — Beitrag zur vergleichenden Histologie der quergestreiften Muskelfaser des Pferdes, Rindes, Schafes und Schweines und Beobachtungen der Nebenscheibe und Mittelscheibe beim Pferd und Schwein. Berlin, 1903. 8°.

Weinstock P. — Synthese des 3, 3^1, 5^1 Trioxyflavons. Düsseldorf, 1903. 8°.

Wyssmann E. — Zur Anatomie der Klauenlederhaut. Berlin, 1902. 8°.

Zehl A. — Die Carpalbeule des Rindes und ihre Behandlung, Berlin, 1903. 8°.

Zorn E. — Ein Beitrag zur Therapie der stationären Hornhauttrübungen bei den Pferden. Magdeburg, 1903. 8°.

II. — Basel.

Amrein G. — Ein Fall von heriditärer Hexadaktylie nebst sechs weiteren Fällen von Polydaktylie aus dem Kinderspital zu Basel. Basel, 1903. 8°.

Armann W. F. — Die Behandlung des congenitalen Klumpfusses an der Poliklinik des Baseler Kinderspitales. Berlin, 1902. 8°.

Bandli C. — Ueber Prostatitis phlegmonosa. Basel, 1902. 8°.

Basch L. — Ueber die Einnwirkung von salpetriger Säure auf Amino-Campher-Harnstoff. Basel, 1903. 8°.

Baumberger E. — Fauna der untern Kreide im westschweizerischen Jura. I. Teil. Stratigraphische Einleitung. Zürich, 1903. 4°.

Beckstroem R. — Ueber die Bestandteile des Kalmusöles. Berlin, s. a. 8°.

Bing R. — Ueber angeborene Muskel-Defecte. Berlin, 1902. 8.°

Brass K. — Kondensationsprodukte des Dioxycumaranons mit Isatin und Aldehyden. Basel, 1903. 8°.

Brunn G. — Ueber einige Chlornitrotoluole und ihr Verhalten gegen Amine, Alkohole und Phenole. Basel, 1903. 8°.

Bühler E. — Ueber ein Oxydationsprodukt von Orthoamido-m-Kresol. Ueber Amino-Naphtacridinsynthesen. Zürich, 1903 8°.

Demant J. — Ueber Phenyl-Naphtyl-Methanderivate. Basel, 1903. 8°.

Desaga A. — Ueber Derivate des m-Dijodbenzols mit mehrwertigem Jod. Basel, 1903. 8°.

Ditthorn F. — Beiträge zur Kenntnis tierischen Kohlehydrate. Basel, 1902, 8°.

Emdem P. — Die Ausströmungserscheinungen des Wasserdampfes. München, 1903. 8°.

Feder A. — Ueber Condensationsprodukte von Barbitursäure mit Aldehyden. Basel, 1903. 8°.

Frerichs H. — Ueber die Einwirkung von Selencyankalium auf Verbindungen der Chloressigsäure. Berlin, 1903. 8°.

Fröhlich J. — Zur Kenntnis des Formazylfarbstoffe. Basel, 1902. 8°.

Gachot C. Beiträge zur Kenntnis der beizenziehenden Azofarbstoffe. Basel, 1902. 8°.

Gebert A. — Beiträge zur Kenntnis des feineren Baues der Speicheldrüsen einiger Säugetiere. Berlin, 1902. 8°.

Gerhard G. — Beiträge zur Blattanatomie von Gewächsen des Knysnawaldes an der Südküste des Kaplandes mit Berücksichtigung des Klimas. Hildesheim, 1902. 8°.

Goldhaber M. — Untersuchungen über die Aethyläpfelsäure. Danzig, 1902, 8°.

Gräflin A. — Beiträge zur Pathologie des Endothels der Cornea. Berlin, 1903. 8°.

Grether E. — A. Ueber Naphtacridinfarbstoffe. B. Ueber das *p*-Diphenylphenol. Lörrach, 1903. 8°.

Gulde J. — Die Dorsaldrüsen der Larven der Hemiptera-Heteroptera. Ein Beitrag zur Kenntnis derselben. Frankfurt, 1902. 8°.

Hassler C. — Ueber die idiopathische Entzündung des Zellgewebes des Cavum Retzii. Leipzig, s. c. 8°.

Helbling R. — Die Erzlagerstätten des Mont Chemin bei Martigny im Wallis. Basel, 1902. 8°.

Holzach K. — Beitrag zur Noelting-Witt'schen Indazolsynthese. Heidelberg, 1903. 8°.

Horvath B. v. — Ueber die Kondensationen von Amidobenzylalkohole mit Phenolen. Karlsruhe 1903, 8°.

Hupfer F. — Ueber die Rhodole aus Hydrochinon und seinen Verwandten. Basel, 1902. 8°.

Hurdelbrink F. — Beiträge zur Kenntnis der Rhodanessigsäuren und der Arythiohydantoine. Braunschweig, 1903. 8°.

Immermann G. — Die Erfolge der Iridectomie bei Iridochorioiditis. s. l., 1903. 8°.

Jakubson R. — Ueber einige Derivate des Phenolphtaleïns. Basel, 1903. 8°.

Johanni J. U. — Ueber einen Amyloidtumor des Kehlkopfs und der Trachea. s. l. et a. 8°.

Jost J. — Beitrag zur Lehre von der Blutentwirkelung des embryonalen Rindes und Schafes. Bonn, 1903. 8°.

Konwalt A. — Ueber den Einfluss benachbarter Nitrogruppen auf orthoständige Chloratome im Benzolkern. Basel, 1903. 8°.

Kroener E. — Ueber derivate des α-Stilbazols. Breslau, 1902, 8°.

Lehrell F. — Histochemische Untersuchungen über das bindegewebige Gerüst der Milz der Wirbelthiere. Leipzig, 1902. 8°.

Leimgruber G. — Embryologisch-anatomische Studien über die Stria vascularis. Wiesbaden, 1902. 8°.

Lotz A. — Der Typhus abdominalis in Kleinbasel von 1897 bis 1900. Leipzig, 1902. 8°.

Mannich C. — Zur Kenntnis des Nonylmethylketons, des Heptylmethylketons und der zugeöhrigen sekundären Alkohole. Rostock, 1903. 8°.

Mackenney R. E. B. — Observations on the conditions of Light production in luminous Bacteria. Washington, 1902. 8°.

Mardner W. — Die Phanerogamen-Vegetation der Kerguelen in ihren Beziehungen zu Klima und Standort. Mainz, 1902. 8°.

Martin V. — Ueber paralytische Luxationen. Stuttgart, 1902. 8°.

Meinhard P. — Das vicinale o- Dinitrodichlorbenzol und seine Condensation mit Aminen, Phenolen und Alkoholen. Basel, 1903. 8°.

Meine W. — Beitrag zur Kenntnis aromatischer Disulfinsäuren. Braunschweig, 1903. 8°.

Metz G. P. — Ueber die Synthese von Phenyloxytriazolen und über « sterische » und « chemische » Hinderung. Zürich, 1902. 8°.

Neuweiler O. — Beitrag zur Anwendung des Murphy-Knopfes bei Magen- und Darmoperationen. Berlin, 1903. 8°.

Oppikofer E. — 3 Taubstummen-Labyrinthe. Ein Beitrag zu der Lehre von den Entwickelungsstörungen des häutigen Labyrinthes. Wiesbaden, 1903. 8°.

Pfister A. — I. Elektrolytisches Leitvermögen der Penten und Hexensäuren; und II. Ueber einige neue Derivate dieser Säuren. Lörrack, 1903. 8°.

Richter A. — Ueber einige Derivate der Ortho-, Meta- und Para- Kreosotinsäuren. Basel, 1903. 8°.

Rudin E. — Ueber Versuche zur Darstelung der Vinylpropionsäure und über α-Methyl-βγ-petensäure. Basel, 1903. 8°.

Schaerfe W. — Ueber Diphenylkalium und einen daraus erhaltenen neuen Kohlenwasserstoff, p-Diphenilendiphenyl. Zürich, 1902. 8°.

Shukon A. — Ueber die Stickverletzungen des Diaphragma von der Thoraxhöhle aus, insbesondere ihre Kasuistik. s. l. et a. 8°.

Silberberg M. — Ueber den Einfluss der Hydrierung auf das Drehungsvermögen. Bern, 1902. 8°.

Sitlig E. — Ueber die Konstitution des 3:5 Dinitro 2:4 Dichlortoluols und seine Kondensationen mit Aminen und Phenolen. Basel, 1902. 8°.

Spühler O. — Beitrag zur Kenntnis der sogenannten fleckformigen Fettdegeneration des Sehnerven speziell bei der Panophthalmie. Leipzig, 1903. 8°.

Stritter R. — Ueber Benzolringspaltungen von Chinoxalinderivaten. Wiesbaden, 1903. 8°.

Sulzberger A. — Ueber das Phenylbenzochinon und einige neue Derivate des Biphenyls. Basel, 1903. 8°.

Wanner F. — Beiträge zur Chemie des Sputums. Naumburg, 1903. 8°.

Wiedmann F. — Beiträge zur Kenntnis der Ketocumaranderivate. Wien, 1902. 8°.

Wildi S. — A. Oxidationen von amidoindazolen. — B. Zur Kenntnis des 1, 2 Naphtalendiazooxyds. Basel, 1903. 8°.

Wortsmann C. — Ueber p-nitrobenzylierte Acetondicarbonsäureester. Basel, 1903. 8°.

Zänker W. — Ueber ein neues Chlortrinitrobenzol. Basel, 1903. 8°,

Zust E. — Ueber die Beziehungen einiger Infectionskrankheiten (Morbilli, Scarlatina, Diphtherie und Typhus abdominalis) zu den Jahreszeiten. Luzern, 1902, 8°.

V. C.